令和９年度専攻科入学者選抜学力検査問題

数　　　学

（選　択）

【配　点】

$\boxed{1}$	５０点
$\boxed{2}$	４０点
$\boxed{3}$	４０点
$\boxed{4}$	４０点
$\boxed{5}$	３０点

受験番号　＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（注　意）

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は 1 ページから 11 ページまでである。
   検査開始の合図のあとで確かめること。
3. 答えは，すべて解答用紙に記入すること。
4. 解答用紙の総得点欄および得点欄には記入しないこと。
5. 定規，コンパス，ものさし，分度器および計算機は用いないこと。

数学

（数学の問題は次のページより記載）

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 方程式

$$-2x + 1 + \sqrt{7x+4} = 0$$

を満たす解を答えよ。

(2) 三角形 ABC は $AB = 1, BC = 2\sqrt{5}, AC = 5$ を満たすとする。このとき，三角形 ABC の面積を答えよ。

(3) 8 段の階段を 1 歩で 1 段または 2 段で上るとき，その上り方の総数を答えよ。

(4) 漸化式

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

の一般解 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ として適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア： $a_n = 6n^2 - 12n + 8$	イ： $a_n = 2n$	ウ： $a_n = 3^n - 1$
エ： $a_n = 3^{n-1} + 1$	オ： $a_n = 3^n + 1$	カ： $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

(5) 直線 $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{4}$ と点 $(2, 1)$ との距離を答えよ。

(計　算　用　紙)

（数学の問題は次のページへ続く）

$\boxed{2}$ 定数 k に対して，方程式

$$-x^3 - 3x^2 + 9x = k$$

が実数解をもつ条件について，以下の問に答えよ。

(1) 3 次関数 $y = -x^3 - 3x^2 + 9x$ の導関数として適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア： $y' = -x^3 - 3x^2 + 9x$	イ： $y' = x^3 + 3x^2 - 9x$
ウ： $y' = -3x^2 - 6x + 9$	エ： $y' = 3x^2 + 6x - 9$
オ： $y' = -x^2 - 2x + 3$	カ： $y' = x^2 + 2x - 3$

(2) 3 次関数 $y = -x^3 - 3x^2 + 9x$ の極大値とそのときの x の値として適切な組合わせを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア： 極大値 -27 $(x = -3)$	イ： 極大値 -11 $(x = -1)$
ウ： 極大値 0 $(x = 0)$	エ： 極大値 5 $(x = 1)$
オ： 極大値 -27 $(x = 3)$	カ： 極大値なし

(3) 3 次関数 $y = -x^3 - 3x^2 + 9x$ の極小値とそのときの x の値として適切な組合わせを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア： 極小値 -27 $(x = -3)$	イ： 極小値 -11 $(x = -1)$
ウ： 極小値 0 $(x = 0)$	エ： 極小値 5 $(x = 1)$
オ： 極小値 -27 $(x = 3)$	カ： 極小値なし

(4) 方程式 $-x^3 - 3x^2 + 9x = k$ が異なる 3 つの実数解をもつときの定数 k の条件として最も適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア： $-27 < k < -11$

イ： $-27 < k < 0$

ウ： $-27 < k < 5$

エ： $-11 < k < 0$

オ： $-11 < k < 5$

カ： $0 < k < 5$

キ： $-3 < k < -1$

ク： $-3 < k < 1$

ケ： $-1 < k < 3$

コ： $1 < k < 3$

$\boxed{3}$ 3点 A, B, C に対して，ベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ をそれぞれ

$$\overrightarrow{AB} = (3, 6), \qquad \overrightarrow{AC} = (6, 3)$$

とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 線分 BC を $4:1$ に外分する点を D とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ として適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア： $(2, -7)$	イ： $(6, 9)$	ウ： $(7, 2)$
エ： $\left(\frac{27}{5}, \frac{18}{5}\right)$	オ： $(9, 6)$	カ： $\left(\frac{21}{5}, \frac{6}{5}\right)$

(2) 線分 AB を $1:2$ に内分する点を E とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{DE}$ として適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア： $(-5, -7)$	イ： $(-1, 9)$	ウ： $(-8, -4)$
エ： $\left(-\frac{22}{5}, -\frac{8}{5}\right)$	オ： $(-6, 0)$	カ： $\left(-\frac{16}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

(3) 線分 AC と線分 DE の交点を P とするとき，線分 AP と PC の辺の比 $(AP : PC)$ として適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア： $1:1$	イ： $1:2$	ウ： $1:3$	エ： $1:4$
オ： $2:1$	カ： $2:3$	キ： $3:1$	ク： $3:2$

(4) 線分 DP と PE の辺の比 $(DP : PE)$ として適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア： $1:1$	イ： $1:2$	ウ： $1:3$	エ： $1:4$
オ： $2:1$	カ： $2:3$	キ： $3:1$	ク： $3:2$

(計　算　用　紙)

（数学の問題は次のページへ続く）

$\boxed{4}$ ベクトル関数 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1(t), x_2(t))$ を未知関数とする連立 2 階微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(0) = {}^t(\sqrt{2}, 1) \\ \boldsymbol{x}'(0) = {}^t(6\sqrt{2}, 6) \end{cases} \qquad (*)$$

を満たす解を求める為に以下の問に答えよ。ただし，^{t} は転置記号を表し，

$$\boldsymbol{x}' = {}^t\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right), \quad \boldsymbol{x}'' = {}^t\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} & 9 \end{pmatrix}$$

とする。

(1) 行列 A の固有値として適切なものを解答群から**全て**選び，記号で答えよ。

解答群

ア : -1	イ : -4	ウ : -6	エ : -9	オ : $-5\sqrt{2}$
カ : 1	キ : 4	ク : 6	ケ : 9	コ : $5\sqrt{2}$

(2) 行列 A の対角化行列 P として適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア : $\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$	イ : $\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$	ウ : $\begin{pmatrix} 5 & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$
エ : $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$	オ : $\begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 3 \\ -3 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$	カ : $\begin{pmatrix} 10\sqrt{2}+9 & 9 \\ 6 & 10\sqrt{2}+6 \end{pmatrix}$

(3) 連立 2 階微分方程式 (*) は $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくことによって，

$$\boldsymbol{y}'' = B\boldsymbol{y} \qquad (**)$$

と変換できる。ここで，行列 B は $B = P^{-1}AP$ を満たす行列である。このとき，(**) の一般解 $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1(t), y_2(t))$ として適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。ただし，解答群に現れる C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ は任意定数である。

解答群

ア: $\begin{cases} y_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y_2 = C_3 e^{-2t} + C_4 e^{2t} \end{cases}$　イ: $\begin{cases} y_1 = C_1 \cos \sqrt{6}t + C_2 \sin \sqrt{6}t \\ y_2 = C_3 e^{-3t} + C_4 e^{3t} \end{cases}$

ウ: $\begin{cases} y_1 = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ y_2 = C_3 e^{-t} + C_4 e^{t} \end{cases}$　エ: $\begin{cases} y_1 = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ y_2 = C_3 \cos t + C_4 \sin t \end{cases}$

オ: $\begin{cases} y_1 = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t \\ y_2 = C_3 e^{-\sqrt{6}t} + C_4 e^{\sqrt{6}t} \end{cases}$　カ: $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-5\sqrt{2}t} + C_2 e^{5\sqrt{2}t} \\ y_2 = C_3 e^{-5\sqrt{2}t} + C_4 e^{5\sqrt{2}t} \end{cases}$

(4) 初期値問題 (*) の解 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1(t), x_2(t))$ として適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \cos 2t + 3\sqrt{2} \sin 2t \\ x_2 = \cos 2t + 3 \sin 2t \end{cases}$

イ: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \cos \sqrt{6}t + 2\sqrt{3} \sin \sqrt{6}t) \\ x_2 = \cos \sqrt{6}t + \sqrt{6} \sin \sqrt{6}t \end{cases}$

ウ: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \cos 3t + 2\sqrt{2} \sin 3t \\ x_2 = \cos 3t + 2 \sin 3t \end{cases}$

エ: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \cos t + 6\sqrt{2} \sin t \\ x_2 = \cos t + 6 \sin t \end{cases}$

オ: $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} e^{-t} + 2\sqrt{2} e^{t} \\ x_2 = -5 e^{-t} + 6 e^{t} \end{cases}$

カ: $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} e^{-5\sqrt{2}t} + 2\sqrt{2} e^{5\sqrt{2}t} \\ x_2 = -e^{-5\sqrt{2}t} + 2 e^{5\sqrt{2}t} \end{cases}$

$\boxed{5}$ 曲面 S を $D = \{(u,v) \mid u^2+v^2 \leqq 6\}$ を定義域とするベクトル関数

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (u+v, u-v, uv)$$

で表される曲面とし，その境界を C とする。C の向きは内部を左に見る方向を正の方向とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 点 (u,v) に対応する曲面 S 上の点における単位法線ベクトルとして適切なものを解答群から選び，記号で答えよ。

解答群

ア: $\pm(u+v, -u+v, -2)$

イ: $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(u^2+v^2)+4}}(u+v, -u+v, -2)$

ウ: $\pm(-2, u+v, -u+v)$

エ: $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(u^2+v^2)+4}}(-2, u+v, -u+v)$

オ: $\pm(-u+v, -2, u+v)$

カ: $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(u^2+v^2)+4}}(-u+v, -2, u+v)$

(2) 曲面 S の面積を答えよ。

(3) スカラー場 $\varphi = x+y+z$ の S 上の面積分の値を答えよ。

(計　算　用　紙)

（数学の問題は以上）