

令和 8 年度専攻科入学者選抜学力検査問題

数 学

(選 択)

【配 点】

1	6 0 点
2	3 0 点
3	4 0 点
4	4 0 点
5	3 0 点

受験番号 _____

(注 意)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は 1 ページから 11 ページまでである。
検査開始の合図のあとで確かめること。
3. 答えは、すべて解答用紙に記入すること。
4. 解答用紙の総得点欄および得点欄には記入しないこと。
5. 定規，コンパス，ものさし，分度器および計算機は用いないこと。

数学

(数学の問題は裏面から記載)

1 次の問いに答えよ。

(1) 直線 $y = 2x + k$ が放物線 $x^2 = -y$ の接線となるとき、定数 k の値を求めよ。

(2) 関数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ の最大値を求めよ。

(3) 平面 $ax + 2y - z = 6$ と直線 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-4}{7}$ が平行となるとき、 a の値を求めよ。

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ の値を求めよ。

(5) 2つの関数 $f(t) = 1 - t$, $g(t) = e^t$ のたたみこみ $f * g$ のラプラス変換は次のうちどれか。記号で答えよ。

(5) の解答群

ア $\frac{1}{s}$ イ $\frac{1}{s^2}$ ウ $\frac{1}{s-1}$ エ $\frac{1}{(s-1)^2}$ オ $\frac{s-1}{s}$ カ $\frac{s-1}{s^2}$

(6) 複素関数 $f(z) = \frac{z-2}{z^2(z-1)^3}$ の $z=0$ における留数を求めよ。

(計 算 用 紙)

- 2 a, b は定数で $a > 0$ のとき、曲線 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ は x 軸と 3 点で交わり、さらに次の 2 つの条件を満たす。

- $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) において極値をとり、極大値と極小値の差は $\frac{2}{27}a^2(\beta - \alpha)$ である。すなわち

$$f(\beta) - f(\alpha) = \frac{2}{27}a^2(\beta - \alpha)$$

が成り立つ。

- 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形のうち、 x 軸より上にある部分の面積は $\frac{1}{4}$ である。すなわち、 $f(x)$ と x 軸の交点の x 座標を小さい順に x_1, x_2, x_3 とするとき

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = \frac{1}{4}$$

が成り立つ。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) α, β について

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{(i)}}, \quad \alpha\beta = \boxed{\text{(ii)}}$$

が成り立つ。(i),(ii) に適するものは次のうちどれか。記号で答えよ。

- (1) の解答群 —

ア $\frac{a}{3}$ イ $\frac{b}{3}$ ウ $\frac{2a}{3}$ エ $\frac{2b}{3}$ オ $-\frac{a}{3}$ カ $-\frac{b}{3}$ キ $-\frac{2a}{3}$ ク $-\frac{2b}{3}$

- (2) a, b の関係式は次のうちどれか。記号で答えよ。

- (2) の解答群 —

ア $2a^2 - 9b = 0$ イ $2a^2 + 9b = 0$ ウ $2a - 9b = 0$ エ $2a + 9b = 0$
 オ $9a^2 - 2b = 0$ カ $9a^2 + 2b = 0$ キ $9a - 2b = 0$ ク $9a + 2b = 0$

- (3) a の値を求めよ。

(計 算 用 紙)

3 定数係数斉次線形微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0$$

について、次の問いに答えよ。ただし、 $\alpha > 0$ とする。

(1) $\alpha = 3$ のとき、一般解は下記の解答群のうちどれか。記号で答えよ。

(2) $\alpha = 4$ のとき、一般解は下記の解答群のうちどれか。記号で答えよ。

(3) $\alpha = 5$ のとき、一般解は下記の解答群のうちどれか。記号で答えよ。

(1),(2),(3) の解答群 (C_1, C_2 は任意定数) —

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------|---|
| ア $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$ | イ $x = e^{2t}(C_1 + C_2 t)$ | ウ $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ |
| エ $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$ | オ $x = e^{-2t}(C_1 + C_2 t)$ | カ $x = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ |
| キ $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$ | ク $x = t(C_1 + C_2 e^{2t})$ | ケ $x = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$ |
| コ $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$ | サ $x = t(C_1 + C_2 e^{-2t})$ | シ $x = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$ |

(4) 初期条件「 $t = 0$ のとき $x = 1, \frac{dx}{dt} = -1$ 」を満たす解が、常に $x(t) > 0$ であるとき、 α の値の範囲は次のうちどれか。記号で答えよ。

(4) の解答群 —

- | | | | | |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ア $\alpha > 0$ | イ $0 < \alpha < 1$ | ウ $0 < \alpha < 2$ | エ $0 < \alpha < 3$ | オ $0 < \alpha < 4$ |
| カ $\alpha \geq 0$ | キ $0 < \alpha \leq 1$ | ク $0 < \alpha \leq 2$ | ケ $0 < \alpha \leq 3$ | コ $0 < \alpha \leq 4$ |

(計 算 用 紙)

4 連立漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 8y_n \end{cases} \quad (n \geq 1 \text{ は自然数})$$

の一般項 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を行列を用いて次のように求めた。(1)~(4) は適する数を求め、(5), (6) に適するものは、それぞれの解答群から選び、記号で答えよ。

与えられた漸化式を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n \geq 1 \text{ は自然数})$$

となる。

ここで、 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ とおくと A の固有値は、小さい値から順に

$$\lambda_1 = \boxed{(1)}, \quad \lambda_2 = \boxed{(2)}$$

であり、それぞれに対応する固有ベクトルは c_1, c_2 を 0 でない定数として、順に

$$\mathbf{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{(4)} \end{pmatrix}$$

である。

次に、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ において $c_1 = 1, c_2 = 1$ としたベクトルをそれぞれ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ として

$$P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2) \text{ とおくと } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。これより

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ であるから } A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \boxed{(5)}$$

である。

ところで、行列表示した漸化式は

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \dots$$

となるため、数列 $\{x_1\}, \{y_1\}$ の一般項は、例えば、初項が $x_1 = \alpha, y_1 = \beta$ であるとき

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \boxed{(6)}$$

として与えられる。

(5) の解答群

ア $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4^{n+1} + 9^n & 2 \cdot 4^n - 2 \cdot 9^n \\ 2 \cdot 4^n - 2 \cdot 9^n & 4^n + 4 \cdot 9^n \end{pmatrix}$	イ $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9^{n+1} + 4^n & 2 \cdot 9^n - 2 \cdot 4^n \\ 2 \cdot 9^n - 2 \cdot 4^n & 9^n + 9 \cdot 4^n \end{pmatrix}$
ウ $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4^n + 4 \cdot 9^n & -2 \cdot 4^n + 2 \cdot 9^n \\ -2 \cdot 4^n + 2 \cdot 9^n & 4^{n+1} + 9^n \end{pmatrix}$	エ $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^n & 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \\ 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & 2^n + 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$

(6) の解答群

$$\text{ア} \quad \frac{\alpha - 2\beta}{5} \cdot 4^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2\alpha + \beta}{5} \cdot 9^{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{イ} \quad \frac{2\alpha + \beta}{5} \cdot 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\alpha - 2\beta}{5} \cdot 3^{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ウ} \quad \frac{2\alpha + \beta}{5} \cdot 4^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\alpha - 2\beta}{5} \cdot 9^{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{エ} \quad \frac{\alpha - 2\beta}{5} \cdot 9^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\alpha + 2\beta}{5} \cdot 4^{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5 周期 2π の関数

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ のフーリエ級数は次のうちどれか。記号で答えよ。

(1) の解答群

$$\begin{array}{ll} \text{ア} & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin(2n-1)x \quad \text{イ} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \\ \text{ウ} & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sin(2n+1)x \quad \text{エ} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x \end{array}$$

(2) (1) のフーリエ級数が収束する関数 $g(x)$ は次のうちどれか。記号で答えよ。

(2) の解答群

$$\begin{array}{ll} \text{ア} & g(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 0 & (x = 0, \pm\pi) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}, \quad g(x+2\pi) = g(x) \\ \text{イ} & g(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}, \quad g(x+2\pi) = g(x) \\ \text{ウ} & g(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 0 & (x = \pm\pi) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}, \quad g(x+2\pi) = g(x) \\ \text{エ} & g(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}, \quad g(x+2\pi) = g(x) \end{array}$$

(3) 次の等式のうち正しいものはどれか。記号で答えよ。

(3) の解答群

$$\begin{array}{ll} \text{ア} & 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \quad \text{イ} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots = \frac{\pi}{4} \\ \text{ウ} & -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots = \frac{\pi}{4} \quad \text{エ} \quad -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \\ \text{オ} & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \quad \text{カ} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \end{array}$$

(計 算 用 紙)