累乗和の公式導出の簡単化と諸性質

杉山康恭[*1]・遠藤良樹[*2]

Deriving the Formula of the Sum of Natural Numbers Easier and Their Natures

Kosuke SUGIYAMA[*1], Yoshiki ENDOH[*2]

Abstract: The sum of the m-th powers of the natural numbers from 1 to n can be expressed $f_m(n)$, polynomial of n. When we derive $f_m(n)$, there is a well-known method that taking sum of identity. But the more m increase, the more this method be complicate and needs time because it uses all identity from 0 to $m-1$. This article shows that $f_m(n)$ can be derived easier than mentioned method by using integral or sequences and considers to several natures of $f_m(n)$.

Key Words: Cauchy Product, Bernoulli Number

1. はじめに

m を0以上の整数，n を自然数とし，1から n までの自然数の m 乗の和を一般化することを考える．例えば $m=1$ の場合には，$1+2+\cdots+n$ と $n+(n-1)+\cdots+1$ の和である $n(n+1)$ を2で割って目的の式を得るが，このような感覚的な考え方は，$m\geq 2$ の場合には適用しづらく，恒等式を用いる方法がよく知られている．しかし，この方法は m が大きくなるほど導出の過程が長くなり，より多くの時間を要する．

ここでは，積分や数列を用いて比較的容易に式を導出する方法を示すとともに，その式の持ついくつかの性質について考察する．

2. 通常の手順での公式導出

前節で示したように，m を0以上の整数，n を自然数とする．また，1から n までの自然数の m 乗の和を $f_m(n)$ と定義する．

$$f_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m=1^m+2^m+\cdots+n^m \tag{2.1}$$

例として次のようなものがある．

$$f_0(n)=\sum_{k=1}^{n}1=n$$

$$f_1(n)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$f_2(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

$$f_3(n)=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

以下で，恒等式を用いて $f_m(n)$（$m\geq 1$）を求めてみる．はじめに，恒等式

$$(k+1)^{m+1}-k^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}{}_{m+1}\mathrm{C}_j\cdot k^j$$

について，$k=1,2,\cdots,n$ の場合を考え辺々加えると，

$$(n+1)^{m+1}-1=\sum_{j=0}^{m}{}_{m+1}\mathrm{C}_j\cdot f_j(n)$$

よって，右辺の総和記号において $j=m$ となる項のみを分離し，$f_m(n)$ について解くと次式が得られる．

$$f_m(n)=\frac{1}{m+1}\left\{(n+1)^{m+1}-1-\sum_{j=0}^{m-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_j\cdot f_j(n)\right\} \tag{2.2}$$

上式から，ある $f_m(n)$ $(m\geq 1)$ を求めるには，$m-1$ 以下の $f_j(n)(0\leq j\leq m-1)$ をすべて代入する必要があり，次数 m が大きくなるほど導出に時間がかかることがわかる．

3. 微分との関係

$f_0(n)=n$ が整式で，(2.1)より $f_1(n),f_2(n),\cdots$ と帰納的に大きな次数 m の式を求められることから，$f_m(n)$ は明らかに整式となる．そこで，自然数 n を実数 x に置き換えて $f_m(x)$ を考えると，これは整式であることから微分可能である．

実際に $m=0,1,2,3$ の場合に微分すると以下のようになる．（以降，$f_m(n)$ や $f_m(x)$ の n や x に具体的な数値を与えない場合などに，それを単に f_m と表すことがある.）

$$\frac{d}{dx}f_0(x)=\frac{d}{dx}x=1$$
$$=0f_{-1}(x)+1$$

$$\frac{d}{dx}f_1(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)=x+\frac{1}{2}$$
$$=1f_0(x)+\frac{1}{2}$$

---

*1 電子制御工学科
Department of Digital Engineering
*2 教養科
Division of Liberal Arts

$$\frac{d}{dx}f_2(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x\right)=x^2+x+\frac{1}{6}$$

$$=2f_1(x)+\frac{1}{6}$$

$$\frac{d}{dx}f_3(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

$$=3f_2(x)+0$$

上記の例の各々で最終的に示した式より，$f_m(x)$ の導関数は数列 A_m を用いて次式で表せることが予想できる．

$$\frac{d}{dx}f_m(x)=m\,f_{m-1}(x)+A_m\quad(m\geq 0)\tag{3.1}$$

これを証明する．

【証明】 数学的帰納法で証明する．

(i) $m=0$ のとき

$$\frac{d}{dx}f_0(x)=\frac{d}{dx}x=1=0f_{-1}(x)+1$$

となる．ここで，$f_{-1}(x)$ は整式でなく，具体的な式でも表せないが，これに 0 をかけているため無視できるものとする．よって，$A_0=1$ とすれば(3.1)が成り立つ．

(ii) $0\leq m\leq m_0$ のとき(3.1)が成り立つと仮定する．

ここで，(2.2)の n を x に置き換えた式を考える．

$$f_m(x)=\frac{1}{m+1}\left\{(x+1)^{m+1}-1-\sum_{j=0}^{m-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_j\cdot f_j(x)\right\}\tag{3.2}$$

$m=m_0+1$ のとき，上式の両辺を x について微分する．直前の仮定を用いて右辺を変形すると，

$$\frac{d}{dx}f_{m_0+1}=\frac{1}{m_0+2}\frac{d}{dx}\left\{(x+1)^{m_0+2}-1-\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot f_j\right\}$$

$$=\frac{1}{m_0+2}\left\{(m_0+2)(x+1)^{m_0+1}-\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot\frac{d}{dx}f_j\right\}$$

$$=(x+1)^{m_0+1}-\frac{1}{m_0+2}\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\{j\,f_{j-1}+A_j\}$$

$$=(x+1)^{m_0+1}-\sum_{j=1}^{m_0}\frac{j}{m_0+2}\,{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot f_{j-1}$$

$$-\frac{1}{m_0+2}\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot A_j$$

となる．ここで，第 2 項について，

$$\frac{j}{m_0+2}\,{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j=\frac{j}{m_0+2}\frac{(m_0+2)!}{j!\,(m_0+2-j)!}$$

$$=\frac{(m_0+1)!}{(j-1)!\,\{(m_0+1)-(j-1)\}!}={}_{m_0+1}\mathrm{C}_{j-1}$$

となることを用いると，

$$\frac{d}{dx}f_{m_0+1}=(x+1)^{m_0+1}-\sum_{j=1}^{m_0}{}_{m_0+1}\mathrm{C}_{j-1}\cdot f_{j-1}$$

$$-\frac{1}{m_0+2}\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot A_j$$

$$=\left\{(x+1)^{m_0+1}-1-\sum_{j=0}^{m_0-1}{}_{m_0+1}\mathrm{C}_j\cdot f_j\right\}$$

$$+\left(1-\frac{1}{m_0+2}\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot A_j\right)$$

また，(3.2)で $m=m_0$ とした式より，

$$(x+1)^{m_0+1}-1-\sum_{j=0}^{m_0-1}{}_{m_0+1}\mathrm{C}_j\cdot f_j=(m_0+1)\cdot f_{m_0}$$

を用い，さらに，

$$A_{m_0+1}=1-\frac{1}{m_0+2}\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot A_j$$

が成り立つように，数列 A_m を漸化式

$$A_0=1\ ,\ A_m=1-\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_j\cdot A_j\ (m\geq 1)\tag{3.3}$$

で定めれば，

$$\frac{d}{dx}f_{m_0+1}=(m_0+1)\cdot f_{m_0}+A_{m_0+1}$$

となり，$m=m_0+1$ のときも (3.1)が成り立つ．

(i),(ii)より，すべての m について(3.1)が成り立つ． //

4. 積分を用いた f_m の一般化

ここでは，(3.1)を用いて f_m を簡単に導出することを考える．

はじめに，$f_m(x)$ に関する次の性質を証明する．

$$f_m(0)=0\tag{4.1}$$

【証明】 数学的帰納法で証明する．

(i) $m=0$ のとき

$f_0(x)=x$ より，$f_0(0)=0$ となるから(4.1)が成り立つ．

(ii) $0\leq m\leq m_0$ のとき(4.1)が成り立つと仮定する．

$m=m_0+1$ のとき，(3.2)は

$$f_{m_0+1}(x)=\frac{1}{m_0+2}\left\{(x+1)^{m_0+2}-1-\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot f_j(x)\right\}$$

となる．これに $x=0$ を代入すると，

$$f_{m_0+1}(0)=\frac{1}{m_0+2}\left\{1^{m_0+2}-1-\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot f_j(0)\right\}$$

直前の仮定より $f_j(0)=0\ (0\le j\le m_0)$ を用いれば，上式は

$$f_{m_0+1}(0)=\frac{1}{m_0+2}\left(-\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot 0\right)=0$$

となり，$m=m_0+1$ のときも (4.1)が成り立つ．
(i),(ii)より，すべての m について(4.1)が成り立つ．//

次に，(3.1)の両辺を 0 から x の区間で積分する．(4.1)を用いると，

$$右辺\rightarrow\int_0^x\left(\frac{d}{dx}f_0(t)\right)dt=f_m(x)-f_m(0)=f_m(x)$$

$$左辺\rightarrow\int_0^x mf_{m-1}(t)dt+A_mx$$

より，

$$f_m(x)=\int_0^x mf_{m-1}(t)dt+A_mx \tag{4.2}$$

となる．さらに上式に $x=1$ を代入すると，

$$f_m(1)=\sum_{k=1}^{1}k^m=1$$

より，

$$1=\int_0^1 mf_{m-1}(t)dt+A_m$$

$$A_m=1-\int_0^1 mf_{m-1}(t)dt \tag{4.3}$$

となる．以上より，

$$f_m(x)=\int_0^x mf_{m-1}(t)dt+\left(1-\int_0^1 mf_{m-1}(t)dt\right)x \tag{4.4}$$

が成り立つ．また，実数 x を自然数 n に置き換えれば，

$$f_m(n)=\int_0^n mf_{m-1}(t)dt+\left(1-\int_0^1 mf_{m-1}(t)dt\right)n \tag{4.5}$$

例として，通常の導出の(2.2)と(4.5)の 2 通りの方法を用いて $f_3(n)$ を求め，過程を比較する．

・通常の導出の式(2.2)を用いる場合

$$f_0=n\ ,f_1=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\ ,f_2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

を用いて，

$$f_3(n)=\frac{1}{4}\left\{(n+1)^4-1-\sum_{j=0}^{2}{}_4\mathrm{C}_j\cdot f_j\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\{n^4+4n^3+6n^2+4n-(f_0+4f_1+6f_2)\}$$

$$=\frac{1}{4}\{n^4+4n^3+6n^2+4n$$

$$-(n+2n^2+2n+2n^3+3n^2+n)\}$$

$$=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

・積分による式(4.5)を用いる場合

$$f_2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

のみを用いて，

$$f_3(n)=\int_0^n 3f_2(t)dt+\left(1-\int_0^1 3f_2(t)dt\right)n$$

$$=\int_0^n\left(t^3+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt+\left(1-\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1\right)n$$

$$=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{2}n^2+\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)n$$

$$=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{2}n^2$$

上に示した例からもわかるように，(4.5)は(2.2)と異なり，直前の次数の式 f_{m-1} のみから f_m を求めることができ，m が大きくなるほど(2.2)を用いた場合と比較して計算量が少なくなるといえる．

5. 数列 A_n とベルヌーイ数 B_n の関係

はじめに，ベルヌーイ数の定義とその漸化式について述べる．ベルヌーイ数 B_n（$n\ge 0$）は，関数

$$P(x)=\frac{x}{e^x-1}$$

の $x=0$ における第 n 次微分係数で定義される．つまり，

$$B_n=\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}P(x)=\lim_{x\to 0}P^{(n)}(x)$$

この数列の値を求める方法には，実際に n 回微分を行わず，$P(x)$ 自身とその逆数のマクローリン展開を利用して得られる漸化式を用いるものがあり，以下でその漸化式を導出する．

まず，B_n の定義から，$P(x)$ のマクローリン展開は次のように書ける．

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \tag{5.1}$$

また，$P(x)$ の逆数は次のようにマクローリン展開できる．

$$\frac{1}{P(x)}=\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n-1\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n \qquad (5.2)$$

(5.1),(5.2)のマクローリン級数の積が 1 になるので，次式が成り立つ.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n\right)=1 \qquad (5.3)$$

ここで，コーシー積と呼ばれる等式を以下に示す.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n \qquad (5.4)$$

ただし，上式は 2 つの級数 $\sum a_nx^n$ と $\sum b_nx^n$ の共通の収束半径において成り立つ.

これを(5.3)に用いて，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n-k+1)!}\right)x^n=1$$

両辺の係数を比較すると，定数項が 1，その他の係数が 0 となるので，

$$\frac{B_0}{0!}\frac{1}{(0-0+1)!}=1\ ,\ \sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n-k+1)!}=0\ (n\geq 1)$$

$n\geq 1$ の場合の式を B_n について解くと，

$$B_n=-n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n-k+1)!}$$
$$=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}B_k$$

以上から，ベルヌーイ数 B_n の漸化式が得られる.

$$B_0=1\ \ ,\ B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k\cdot B_k\ \ (n\geq 1) \qquad (5.5)$$

一方，(3.3)は m を n に，j を k に置き換えると次式となる.

$$A_0=1\ ,\ A_n=1-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k\cdot A_k\ (n\geq 1) \qquad (5.6)$$

(5.5),(5.6)は非常に似た形をしており，A_n も何らかの関数の $x=0$ における第 n 次微分係数になるのではないかと考えられる. そこで，関数 $P(x)$ からベルヌーイ数の漸化式を求めた手順を逆にたどり，$x=0$ における第 n 次微分係数が A_n となるような関数を求めてみる.

まず，(5.6)の $n\geq 1$ の場合の式について，総和記号の項を左辺に移項し，元の左辺 A_n とまとめると次のようになる.

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}{}_{n+1}\mathrm{C}_k\cdot A_k=1$$

上式は $n=0$ のときも成り立つため，(5.6)はこの一つの式で表せる. 両辺を $n!$ で割ると，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n+1-k)!}A_k=\frac{1}{n!}$$

さらに，上式を x^n の係数とする冪級数をとると，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{k!}\frac{1}{(n-k+1)!}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

(5.4)を逆に利用して左辺を変形すると，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n\right)=e^x$$

さらに，(5.2)を用いると，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}x^n\right)\frac{1}{P(x)}=e^x$$

よって，次のマクローリン展開が成り立つ.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}x^n=e^x\cdot P(x)=\frac{xe^x}{e^x-1} \qquad (5.7)$$

次に，A_n と B_n の関係を求める. 上式を変形して(5.1)を用いると，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}x^n=\frac{xe^x}{e^x-1}=\frac{x}{1-e^{-x}}=\frac{(-x)}{e^{-x}-1}$$
$$=P(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nB_n}{n!}x^n$$

よって，次の関係式が成り立つ.

$$A_n=(-1)^nB_n \qquad (5.8)$$

6. 数列 A_n を用いた f_m の一般化

(4.5)では f_{m-1} と積分を用いて f_m を表したが，以下では数列 A_n を用いて f_m を表すことを考える.

まず，自然数 n に対して関数 $G_n(x)$ を次のように定義する.

$$G_n(x)=\sum_{k=1}^{n}e^{kx}$$

この式の両辺を x について m 回微分すると，

$$G_n^{(m)}(x)=\sum_{k=1}^{n}k^me^{kx}$$

さらに $x=0$ を代入すると，(2.1)の定義から，

$$G_n^{(m)}(0)=\sum_{k=1}^{n}k^m\cdot 1=f_m(n) \qquad (6.1)$$

つまり，累乗和 $f_m(n)$ は $G_n(x)$ の $x=0$ における第 m 次微分係数で表すことができる.

一方，$G_n(x)$ は，$x\neq 0$ においては初項 e^x，公比 e^x，項数 n の等比数列の和であり，次のように表すこともできる.

$$G_n(x)=e^x\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}\quad (x\neq 0)$$

よって，上式右辺の第 m 次導関数の $x\to 0$ における極限が $f_m(n)$ を表すことになる.

これを実際に m 回微分することは困難であるが，(5.7),(5.4)を用いることで数列 A_n を用いたマクローリン展開が可能になる.

（以下では，総和記号の変数を n から l に変更してある.）

$$G_n(x)=\frac{xe^x}{e^x-1}\frac{e^{nx}-1}{x}$$
$$=\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{l!}x^l\right)\frac{1}{x}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}(nx)^l$$
$$=\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{l!}x^l\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{n^l}{l!}x^{l-1}\right)$$
$$=\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{l!}x^l\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n^{l+1}}{(l+1)!}x^l\right)$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{l}\frac{A_k}{k!}\frac{n^{l-k+1}}{(l-k+1)!}\right)x^l$$

最終的に得られたマクローリン級数を m 回微分すると，

$$G_n^{(m)}(x)=\sum_{l=m}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{l}\frac{A_k}{k!}\frac{n^{l-k+1}}{(l-k+1)!}\right){}_l\mathrm{P}_m x^{l-m}$$

$x=0$ とすると，右辺は $l=m$ に対応する定数項のみが残る．

$$G_n^{(m)}(0)=\sum_{k=0}^{m}\frac{A_k}{k!}\frac{n^{m-k+1}}{(m-k+1)!}{}_m\mathrm{P}_m$$

左辺は(6.1)より $f_m(n)$ となり，右辺を変形すると，

$$f_m(n)=\sum_{k=0}^{m}\frac{A_k}{k!}\frac{n^{m-k+1}}{(m-k+1)!}m!$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\,(m+1-k)!}A_k\cdot n^{m-k+1}$$
$$=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)!}{k!\,(m+1-k)!}A_k\cdot n^{m-k+1}$$

よって，次式が成り立つ．

$$f_m(n)=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}{}_{m+1}\mathrm{C}_k\cdot A_k\cdot n^{m-k+1} \tag{6.2}$$

上式は，数列 A_n の値のみから右辺が求められることを意味している．A_n の値は漸化式から単なる数の和で求まるので，導出の過程が簡潔になるといえる．

例として，(6.2)を用いて $f_3(n)$ を求めてみる．

数列 A_n の漸化式(5.6)から，

$$A_0=1$$
$$A_1=1-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{0}{}_2\mathrm{C}_k\cdot A_k=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$A_2=1-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{1}{}_3\mathrm{C}_k\cdot A_k=1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{6}$$
$$A_3=1-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2}{}_4\mathrm{C}_k\cdot A_k=1-\frac{1}{4}(1+2+1)=0$$

より，

$$f_3(n)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{m}{}_4\mathrm{C}_k\cdot A_k\cdot n^{4-k}=\frac{1}{4}(1n^4+2n^3+1n^2)$$
$$=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{2}n^2$$

7. f_m のグラフの図形的性質

ここでは，$f_m(x)$ の図形的な性質について考察する．まず，曲線 $y=f_m(x)$ $(m\geq 1)$ のグラフの 4 つの例を図 1 に示す．

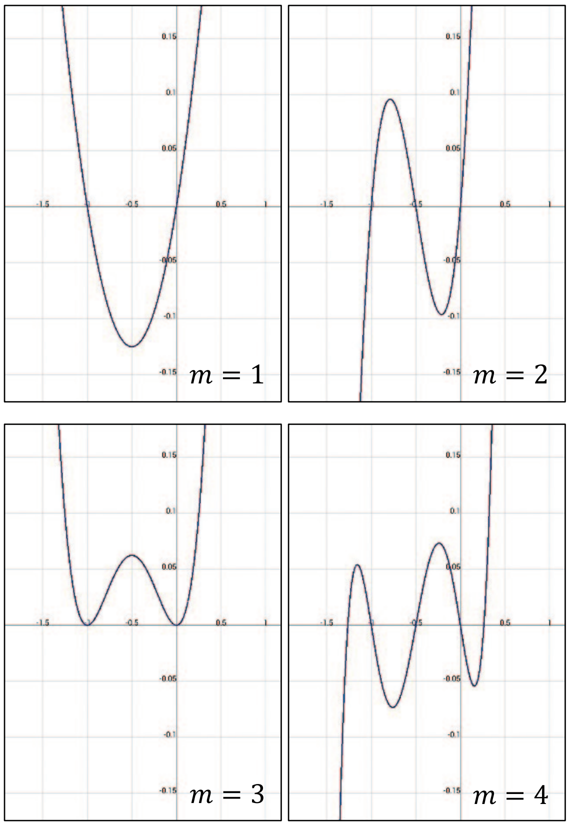

図 1　$y=f_m(x)$ のグラフ

図 1 から，$f_m(x)$ のグラフの次のような性質を予想できる．

$$m\text{ が奇数}\Rightarrow\text{直線 }x=-\frac{1}{2}\text{ に関して対称} \tag{7.1}$$

$$m\text{ が偶数}\Rightarrow\text{点 }\left(x,f_m(x)\right)=\left(-\frac{1}{2},0\right)\text{ に関して対称} \tag{7.2}$$

これらは，$f_m(x)$を直線 $x=-\frac{1}{2}$ に関して対称移動したものが，m が奇数のとき $f_m(x)$ に，m が偶数のとき $-f_m(x)$ に一致することであり，これは以下のように数式で表せる．

まず，直線 $x=-\frac{1}{2}$ に関する対称移動は以下の手順で行える．

- x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 平行移動：$f_m\left(x-\frac{1}{2}\right)$
- 直線 $x=0$ に関して対称移動：$f_m\left(-x-\frac{1}{2}\right)$
- x 軸方向に $-\frac{1}{2}$ 平行移動：$f_m\left(-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)$

よって，$f_m(x)$を直線 $x=-\frac{1}{2}$ に関した対称移動したものは $f_m(-x-1)$ となり，これに m が奇数のとき 1，m が偶数のとき -1，つまり $(-1)^{m-1}$ をかけることで(7.1), (7.2)に示した性質を表せる．

$$f_m(-x-1)=(-1)^{m-1}f_m(x) \tag{7.3}$$

これを証明するために，以下ことを先に証明する．

$$f_m(-1)=0 \ \ (m\geq 1) \tag{7.4}$$

$$A_{2l+1}=0 \ \ (l\geq 1) \tag{7.5}$$

【(7.4)の証明】

数学的帰納法で証明する．

(i) $m=1$ のとき

$f_1(x)=\frac{1}{2}x(x+1)$ より $f_1(-1)=0$．よって(7.4)が成り立つ．

(ii) $1\leq m\leq m_0$ のとき(7.4)が成り立つと仮定する．

$m=m_0+1$ のとき，(3.2)は

$$f_{m_0+1}(x)=\frac{1}{m_0+2}\left\{(x+1)^{m_0+2}-1-\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot f_j(x)\right\}$$

となる．これに $x=-1$ を代入すると，

$$f_{m_0+1}(-1)=\frac{1}{m_0+2}\left\{-1-\sum_{j=0}^{m_0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot f_j(-1)\right\}$$

ここで，直前の仮定より $f_j(-1)=0 \ (1\leq j\leq m_0)$ を用いると，右辺の総和記号の項は

$$\sum_{j=0}^{0}{}_{m_0+2}\mathrm{C}_j\cdot f_j(-1)=f_0(-1)=-1$$

となるので，

$$f_{m_0+1}(-1)=\frac{1}{m_0+2}\{-1-(-1)\}=0$$

よって， $m=m_0+1$ のときも (7.4)が成り立つ．

(i),(ii)より，すべての $m(\geq 1)$ について(7.4)が成り立つ．//

【(7.5)の証明】

数学的帰納法で証明する．

(i) $l=1$ のとき

$A_3=0$ より(7.5)が成り立つ．

(ii) $1\leq l\leq l_0$ のとき(7.5)が成り立つと仮定する．

$l=l_0+1$ のとき，(5.6)の $n\geq 1$ の場合の式について，n を $2l+1=2l_0+3$ に置き換えると，

$$A_{2l_0+3}=1-\frac{1}{2l_0+4}\sum_{k=0}^{2l_0+2}{}_{2l_0+4}\mathrm{C}_k\cdot A_k \tag{7.6}$$

同様に，(5.5)の $n\geq 1$ の場合の式について，n を $2l_0+3$ に置き換え，(5.8)の関係を用いると，

$$B_{2l_0+3}=-\frac{1}{2l_0+4}\sum_{k=0}^{2l_0+2}{}_{2l_0+4}\mathrm{C}_k\cdot B_k$$

$$-A_{2l_0+3}=-\frac{1}{2l_0+4}\sum_{k=0}^{2l_0+2}{}_{2l_0+4}\mathrm{C}_k(-1)^kA_k \tag{7.7}$$

(7.6)から(7.7)を辺々引くと，

$$2A_{2l_0+3}=1-\frac{1}{2l_0+4}\sum_{k=0}^{2l_0+2}{}_{2l_0+4}\mathrm{C}_k\cdot A_k\{1-(-1)^k\}$$

$1-(-1)^k$ と仮定 $A_{2k+1}=0 \ (1\leq k\leq l_0)$ に注意して上式右辺を変形する．

$$2A_{2l_0+3}=1-\frac{1}{2l_0+4}\sum_{k}{}_{2l_0+4}\mathrm{C}_k\cdot A_k\cdot 2$$

$$(0\leq k\leq 2l_0+2 \ \ , \ k:奇数)$$

$$=1-\frac{1}{l_0+2}\left({}_{2l_0+4}\mathrm{C}_1\cdot A_1+\sum_{k}{}_{2l_0+4}\mathrm{C}_k\cdot A_k\right)$$

$$(3\leq k\leq 2l_0+1 \ \ , \ k:奇数)$$

$$=1-\frac{1}{l_0+2}\left((2l_0+4)\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{l_0}{}_{2l_0+4}\mathrm{C}_{2k+1}\cdot A_{2k+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{l_0+2}\left(l_0+2+\sum_{k=1}^{l_0}{}_{2l_0+4}\mathrm{C}_{2k+1}\cdot 0\right)$$

$$=1-1=0$$

よって， $A_{2l_0+3}=0$ となり， $l=l_0+1$ のときも (7.5)が成り立つ．

(i),(ii)より，すべての $l(\geq 1)$ について(7.5)が成り立つ．//

(7.4), (7.5)を利用して(7.3)を証明する．

【(7.3)の証明】

数学的帰納法で証明する．

(i) $m=1$ のとき

$$f_1(x)=\frac{1}{2}x(x+1)$$

より

$$f_1(-x-1)=\frac{1}{2}(-x-1)(-x)=f_1(x)=(-1)^{1-1}f_1(x)$$

となり，(7.3)が成り立つ．

(ii) $m=m_0$ のとき(7.3)が成り立つと仮定する．

$m=m_0+1$ のとき，(4.2)より，

$$f_{m_0+1}(x)=\int_0^x(m_0+1)f_{m_0}(t)dt+A_{m_0+1}x \tag{7.8}$$

x を $-x-1$ に置き換えて，

$$f_{m_0+1}(-x-1)=\int_0^{-x-1}(m_0+1)f_{m_0}(t)dt-A_{m_0+1}\cdot(x+1)$$

右辺の定積分において，

$$t = -s - 1$$

と置換すると，

$$dt = -ds,\ t: 0 \to -x-1 \text{ のとき } s: -1 \to x$$

となる．これと直前の仮定を用いて変形すると，

$$f_{m_0+1}(-x-1) = -\int_{-1}^{x}(m_0+1)f_{m_0}(-s-1)dt$$
$$-A_{m_0+1}\cdot(x+1)$$
$$= -\int_{-1}^{x}(m_0+1)(-1)^{m_0-1}f_{m_0}(s)dt - A_{m_0+1}\cdot(x+1)$$
$$= (-1)^{m_0}\left\{\int_0^{x}(m_0+1)f_{m_0}(s)dt - \int_0^{-1}(m_0+1)f_{m_0}(s)dt\right\}$$
$$-A_{m_0+1}\cdot(x+1) \qquad (7.9)$$

ここで，(7.8)から，

$$\int_0^{x}(m_0+1)f_{m_0}(t)dt = f_{m_0+1}(x) - A_{m_0+1}x \qquad (7.10)$$

さらに，上式に $x = -1$ を代入し，(7.4)を用いると，

$$\int_0^{-1}(m_0+1)f_{m_0}(t)dt = f_{m_0+1}(-1) + A_{m_0+1}$$
$$\int_0^{-1}(m_0+1)f_{m_0}(t)dt = A_{m_0+1} \qquad (7.11)$$

(7.10),(7.11)を(7.9)に代入すると，

$$f_{m_0+1}(-x-1) = (-1)^{m_0}\left(f_{m_0+1}(x) - A_{m_0+1}x - A_{m_0+1}\right)$$
$$-A_{m_0+1}\cdot(x+1)$$
$$= (-1)^{m_0}f_{m_0+1}(x) - (-1)^{m_0}A_{m_0+1}\cdot(x+1)$$
$$-A_{m_0+1}\cdot(x+1)$$
$$= (-1)^{m_0}f_{m_0+1}(x) - \{(-1)^{m_0}+1\}A_{m_0+1}\cdot(x+1)$$

m が奇数のとき $(-1)^{m_0}+1=0$， m が偶数のとき(7.5)から $A_{m_0+1}=0$ となるので，すべての $m_0(\geq 1)$ について $\{(-1)^{m_0}+1\}A_{m_0+1}=0$ が成り立つ．よって，

$$f_{m_0+1}(-x-1) = (-1)^{m_0}f_{m_0+1}(x)$$

となり， $m = m_0+1$ のときも (7.3)が成り立つ．

(i),(ii)より，すべての $m(\geq 1)$ について(7.3)が成り立つ．//

8. おわりに

累乗和の公式導出の簡単化を行う過程で，微積分や数列との関係や，グラフの線対称，点対称といった図形的性質が導かれた．これらを組み合わせることで，累乗和を様々な方法で表現できるとともに，より簡単な導出が可能になると考えられる．また，次数 m を実数に拡張しても微積分の関係がそのまま成り立つことが予想でき，数列を，階乗をガンマ関数に拡張したように実数の範囲に拡張することが可能であれば，以上に述べたことがゼータ関数などに関連づけられる可能性があり，発展が期待できる．

9. 参考文献

[1] 大槻義彦訳，数学大公式集，p.1076，丸善株式会社，(1986).

[2] 酒井孝一著, 無限級数, p.98, 共立出版株式会社, (1977).