KTJ08 物理学実験教材の改定: 単振子の振動

舟田 敏雄 *1 大脇 雅信 *2 大庭 勝久 *3

Update of Experiment Materials of Physics in KTJ08 Course: Oscillation of a Simple Pendulum

Toshio FUNADA*1 Masanobu OWAKI*2 and Katsuhisa OHBA*3

Abstract: One of physics experiments in KTJ08 course of INTEC (International Education College) is assigned to the oscillation of a simple pendulum, as a standard experiment in linear and weakly nonlinear oscillations. In addition, INTEC which is in Shah Alam city, Selangor Malaysia, is located at North attitude 3.0478331°, thus the acceleration due to gravity is evaluated as $g_S = 9.7761$ m/s^2. It may be very interesting to ask any difference in the pendulum motions due to the locational condition. The experiment method was improved much to obtain high accuracy data of the oscillation period. The experiments should be made as in weakly nonlinear oscillations to obtain their periods in high accuracy.

Keywords: Oscillation of a Simple Pendulum, Gravity Acceleration at Shah Alam, Less Foucault Pendulum

1 はじめに

MQA (Malaysian Qualifications Agency)[1] による教程審査に向け，2015 年度の KTJ (Kumpulan Teknikal Jepun) 07 の物理学の教程に物理学実験が設けられた．KTJ07 の教程では 2014 年度の Semester 2 から日本語による物理学教育が始まり，2015 年 4 月の Semester 3 から物理学と電気基礎の教程となった．これと共に，2015 年度より，物理「第 4 章 円運動と万有引力」の前半が文部科学省試験物理の試験範囲に加えられた．こうした経緯を踏まえて，物理学実験テーマは，Semester 3 (S3) と 4 (S4) で 3 つずつ選定され [2],[3]，教科書の出版社の実験資料「改訂版 物理 I 実験プリント (教科書『改訂版 高等学校 物理 I』(物 I /014) 対応)」[4] を参考として改定されて来ている．

本報告では，振子の単振動実験を取り上げ，次の 3 点が考慮される．(1) 日本の高校物理と同様の実験を行い，併せて，小・中学校での振子の学習内容を理解し，日本での振子教育・教材に関する知見を深めて，高専への編入学の予備教育を効果的に進める．(2) INTEC は北緯 λ_I =3.0478331 度 [5] (この緯度での Foucault 振子の振動周期 [6],[7] は $1\ \mathrm{day}/\sin(\lambda_I) = 18.8077$ day) で東経 101.5017323 度に位置し，INTEC の所在地 Shah Alam 市の重力加速度 [8] は $g_S = 9.7761$ m/s^2 と評価され，近隣の Kuala Lumpur 市の重力加速度 [8] は $g_K = 9.77603$ m/s^2 と評価される．それに対して，沼津高専の位置は北緯 λ_N =35.0955842 度 [5] (そこでの Foucault 振子の振動周期は $1\ \mathrm{day}/\sin(\lambda_N) = 1.73931$ day) で東経 138.8634925 度に位置し，沼津市の重力加速度 [8] は $g_N = 9.79747$ m/s^2 と評価される．つまり，INTEC の地球上の位置により振子の実現条件が日本とは異なることを実験的に見出す．(3) 振子実験では，糸の長さによる振動周期の変化があり，周期は錘の質量や初期振幅に依らないことを理解することが挙げられるが，振子の振動は本来非線形現象であるので，周期の初期振幅 (角度) 依存性を正確に理解する方が望ましい．

2 振子実験の実施状況

実際の KTJ07 の実験で，(1) に関しては，糸の長さを 0.2-1.6 m (0.2 m 刻み) で 5 つ取り，小振幅初期値の各振動実験で 10 周期の時間を 5 回測定していた．即ち，測定に用いるストップウォッチは 1/100 s から測定できるので，糸の長さが 0.2 m の振子の理論周期 0.897598 s の場合でも測定誤差 $\epsilon_m = (0.898 - 0.897598)/0.897598 = 0.045$ % 程度であり，重力加速度の差異 $(g_S - 9.8)/9.8 = 0.24$ % よりは小さく，理論的には g_S を検出可能である．故に，振子の糸の長さを {0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0} m に設定した実験班から，{0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6} m に設定した班まで 4 種類あり，10 周期を 5 回測定するときに要する時間 (理論周期から計算できる振子の振動時間の 4 種類の合計) は {6.26997, 7.35419, 8.27537, 9.09546} min となる．しかし，実験条件の変更に要する時間等があるが，50 分の実験時間を未だ有効に使っておらず，2 年目の KTJ08 の実験での改良点に挙げた．従って，(3) で初期振幅を $\pi/6$ とし，各振動実験で 10 周期の時間を 5 回測定することが加えられた．(3) では，さらに初期振幅を $\pi/3$ での測定で進展が見られた．しかし，測定技術の習熟度が未だ足り

*1 沼津高専 名誉教授: Professor emeritus. 現在は，国際教育カレッジ (INTEC) 高専予備教育コース (KTJ): KTJ, DPT, International Education College, UiTM Section 17 Campus, 40200, Shah Alam, Selangor, Malaysia.

*2 国際教育カレッジ (INTEC) 高専予備教育コース (KTJ): KTJ, DPT, International Education College, UiTM Section 17 Campus, 40200, Shah Alam, Selangor, Malaysia.

*3 電子制御工学科: Department of Electronic Control System Engineering.

ず，実験の実施時間が 50 分に限られているため，(2) の実験は 10 周期の時間測定では未だ分解能が厳しく，100 周期の時間測定等を実施する余地が未だなく，今後の実験方法と測定技術の工夫を待たなければならない．

2.1 KTJ08 の振子実験の実施状況

2016 年 9 月 5 日に振子の実験が始まり，9 月 6 日のはやて第 4 班が線形・非線形振動実験の pace を作り，はやて第 3 班が，さらに 9 月 7 日のつばさ第 5 班が非線形振動のデータを取ったので，つばさ第 5 班のデータを中心に測定結果をまとめた．その後，再実験等が行われ，はやて第 1 班，はやぶさ第 4 班，つばさ第 3 班の非線形振動のデータは測定技術が向上しており高く評価される．次節以降では，つばさ第 5 班の測定結果のまとめの資料に続き，それら 3 班の非線形振動データを解説する．

3 単振子の自由振動と理論的誤差評価

Fig.1 に示すように，振子の糸の長さを L_1，重力加速度を $g = 9.8$ m/s^2，錘の質量を m_1，鉛直軸下側から反時計回りに測る振子の角度を $\theta_1 \equiv \theta_1(t)$ として，初期角度 θ_0 から静かに始まる振子の線形自由振動 $\theta_1(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ の角振動数 ω_0 と周期 T_0 は，次式で与えられる:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L_1}},\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{3.1}$$

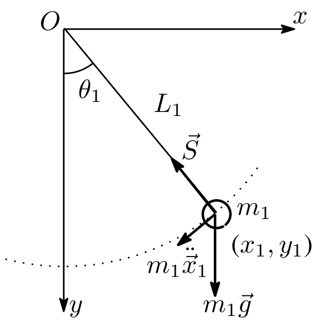

Fig.1 Simple pendulum of a particle of mass m_1 which is constrained with string of length L_1 inclined by angle θ_1 from the vertical y-axis. The tension $\vec{S}$ and the gravity force $m_1\vec{g}$ act on the particle at $\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$.

同様の初期角度に対して，振子の弱非線形振動 $\theta_1(t) = \theta_0 \cos(\omega_1 t)$ の角振動数 ω_1 と周期 T_1 は次式で与えられる (先の報告 [9] の (2.11) 式):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L_1}\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)},\ T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \tag{3.2}$$

振子の運動方程式 (2D デカルト座標系の運動方程式を平面極座標系に変換した式の一部):

$$m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g L_1 \sin(\theta_1) \tag{3.3}$$

の初期値問題を数値解析し，数値解から周期 T_2 を求めた．

振子の運動について，力学的エネルギー E の保存則が成立ち，書換えて θ_1 の微分方程式を得る:

$$E = \frac{m_1}{2} L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g L_1 \left(1 - \cos(\theta_1)\right) \tag{3.4}$$

$$= m_1 g L_1 \left(1 - \cos(\theta_0)\right) \tag{3.5}$$

$$\rightarrow \dot{\theta}_1^2 = \frac{2g}{L_1}\left(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)\right) \tag{3.6}$$

これを書換えて，振動周期 T_3 は振子が区間 $0 \leq \theta_1 \leq \theta_0$ を運動する時間の 4 倍なので，次式が成立つ:

$$4\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta_1}{\sqrt{2g\left(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)\right)/L_1}} = T_3 \tag{3.7}$$

この積分は，初等積分には含まれないが，数値的には解ける．ここでは，Mathematica10J を用いて数値積分した．数値積分では $\theta_0 = 5\pi/12$ の場合，一部に複素数が出て来るが，誤差なので切り捨ててある．

(3.7) 式の積分よりも (3.3) 式の数値積分の方が将来学生が出会う機会が多いだろうから，(3.3) 式の数値解による周期 T_2 を「正確な振動解による周期」として扱う．

以上の計算結果は，**Table 1** にまとめられる．そこに含まれる相対誤差 $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ は，次式で定義される:

$$\epsilon_0 = \frac{T_2 - T_0}{T_0},\ \epsilon_1 = \frac{T_2 - T_1}{T_1},\ \epsilon_2 = \frac{T_2 - T_3}{T_3} \tag{3.8}$$

各式の分母の周期の値が異なるので，注意する．なお，T_2 と T_3 は **Table 1** に表示されている数値では同じであり，誤差 ϵ_2 の小さな程度で差異が現れる．

Table 1 単振子の自由振動の初期角度と角振動数と周期の関係と誤差評価

θ_0	ω_0	ω_1	T_0	T_1	T_2	T_3	ϵ_0	ϵ_1	ϵ_2
$\frac{\pi}{24}$	3.1305	3.12714	2.00709	2.00924	2.00924	2.00924	0.00107201	-6.38×10^{-7}	3.91×10^{-8}
$\frac{\pi}{12}$	3.1305	3.11706	2.00709	2.01574	2.01572	2.01572	0.00430056	-0.0000107947	-7.976×10^{-9}
$\frac{\pi}{6}$	3.1305	3.07639	2.00709	2.04239	2.04203	2.04203	0.0174088	-0.000176216	-1.108×10^{-8}
$\frac{\pi}{4}$	3.1305	3.00738	2.00709	2.08925	2.08732	2.08732	0.0399733	-0.000925088	7.184×10^{-9}
$\frac{\pi}{3}$	3.1305	2.90803	2.00709	2.16063	2.15397	2.15397	0.073182	-0.00308255	1.755×10^{-8}
$\frac{5\pi}{12}$	3.1305	2.77507	2.00709	2.26416	2.24585	2.24585	0.118959	-0.0080847	1.879×10^{-9}
$\frac{\pi}{2}$	3.1305	2.60335	2.00709	2.4135	2.36905	2.36905	0.180341	-0.0184172	-8.719×10^{-9}

初期角度 θ_0 は線形振動の ω_0 と T_0 には影響しない．$0 \leq \theta_0 \leq \pi/6$ の範囲では，T_0 は T_2 (または T_3) に近い値であり，周期の誤差 ϵ_0 が 2% 以内なので，周期が初期角度に依らない「振子の等時性」が成り立つと言える．また，$(g_S - g)/g_S = -0.24$ % を検出する要件を満たす必要がある．しかし，初期角度の増加に伴い ϵ_0 が増加して，$\pi/6 < \theta_0$ では線形理論は成り立たないと考えられる．

弱非線形理論による ω_1 と T_1 は初期振幅が小さい場合

も大きい場合も T_2 (または T_3) の良い近似値を与えており，$\theta_0 = \pi/2$ でも誤差 ϵ_1 は 2% 以内である．誤差 ϵ_1 と ϵ_0 を比較して，弱非線形理論の ω_1 と T_1 は線形理論の ω_0 と T_0 よりも誤差で 1/10 程度に高精度であると言える．

3.1 地球の重力 [10]

wikipedia[10] によれば，標準重力として知られる地表の名目上の平均値は，9.80665 m/s^2 である．地表の見かけの重力は，ペルーのワスカランの 9.7639 m/s^2 から北極海海面の 9.8337 m/s^2 まで，約 0.7% の差異がある．

地球の表面は回転しており，そのため慣性系ではない．赤道付近の緯度では，地球の自転によって生じる外向きの遠心力は，極付近の緯度よりも大きい．この力は，地球の重力を赤道付近で最大 0.3% 打ち消し，見かけの下向きの加速度を減少させる [10]．

$g_S = 9.7761$ m/s^2 と国際標準値 $g_0 = 9.80665$ m/s^2 との差異は $(g_S - g_0)/g_0 = -0.00311523$ であるので，0.3% 程度の差異を実験で検出する必要がある．振子の長さを $L_1 = 1$ m とおくと，周期 T_0, T_S は次式となる:

$$\begin{cases} T_0 = 2\pi/\sqrt{g_0/L_1} = 2.00641 \text{ s}, \\ T_S = 2\pi/\sqrt{g_S/L_1} = 2.00954 \text{ s} \end{cases} \tag{3.9}$$

これらの値に基づき，100 周期の時間を測るものとして，差異が試算される:

$$100 * (T_S - T_0) = 0.313254 \text{ s} \tag{3.10}$$

これによると，単振子の振動の 100 周期の測定に要する時間は $200.954/60 = 3.349$ min であり，1000 周期の測定に要する時間は 10 倍の $2009.54/60 = 33.49$ min である．100 周期の測定は実施可能であるが，KTJ08 の実験時間 50 分では 1000 周期の測定を複数回行うのは難しい．

3.2 理論的誤差評価

振子の自由振動の基礎理論式 (3.1) に基づき，誤差評価を試みる．測定する量に誤差 ϵ が生じるとき，最終結果にどう影響を及ぼすか調べ，測定値の信頼性を高める．重力加速度に誤差 ϵ_1 があり，振子の長さに誤差 ϵ_2 があるとして，線形振動周期の式は次のように表される:

$$\begin{cases} T_x(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2\pi \Big/ \sqrt{\dfrac{g_0(1+\epsilon_1)}{L_1(1+\epsilon_2)}}, \\ T_0 = T_x(0,0),\ T_1 = T_x(0, 0.01),\ T_2 = T_x(0.002, 0) \end{cases} \tag{3.11}$$

これらを用い，振子の長さ L_1 について周期を求め，誤差を計算すると **Table 2** となる．

Table 2 g_0 と L_1 に誤差がある場合の周期値への影響

L_1	0.25	0.5	1	2
T_0	1.00354	1.41923	2.00709	2.83845
T_1	1.00855	1.42631	2.0171	2.85261
$T_1 - T_0$	0.00501	0.00708	0.01001	0.01416
T_2	1.00254	1.41781	2.00509	2.83562
$T_2 - T_0$	−0.00100	−0.00142	−0.00200	−0.00283

周期に誤差がある場合に重力加速度への影響を調べる:

$$g_x(\epsilon_3) = L_1 \left(\frac{2\pi}{T(1+\epsilon_3)} \right)^2 \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} g_x(0) = 9.8,\ g_x(0.01) = 9.6069, \\ (g_x(0.01) - g_x(0))/g_x(0) = -0.019704, \\ g_x(0.001) = 9.78043, \\ (g_x(0.001) - g_x(0))/g_x(0) = -0.001997 \end{cases} \tag{3.13}$$

実験に用いているストップウォッチは 1/100 s まで読み取れるので，10 周期の時間を正確に測った場合には誤差は $\epsilon_3 = \pm 0.001$ で重力加速度の相対誤差は ± 0.2 %，粗い測定では $\epsilon_3 = \pm 0.01$ で相対誤差は ± 2 % となる．しかしながら，実際の測定値では相対誤差で 20% 程度のものもあり，振子の振動周期測定の経験を積み，測定のコツに習熟し測定精度をさらに上げる必要がある．

4 単振子の自由振動の周期測定

KTJ08 の測定例を以下に示す．入力値は，錘の半径 r_0 [cm], 錘の質量 m [g] に続き, 糸の長さ L_0 と周期の 5 回の測定値で構成される．線形理論の表示は $L_1 = L_0 + r_0$, 測定周期 T_e, $T_t = 2\pi/\sqrt{g_0/L_1}$, $\epsilon_t = (T_t - T_e)/T_t$, $g_1 = 4\pi^2 L_1/T_e^2$, $\epsilon_g = (g - g_0)/g_0$ で，$L_1, T_e, T_t, \epsilon_t$ [%], g_1, ϵ_g [%] と略記される．また，弱非線形理論の表示は L_1, T_e, T_t, ϵ_t, g_1, ϵ_g, $T_{tn} = 2\pi/\sqrt{g_0/L_1(1-(\pi/6)^2/8}$, $\epsilon_{tn} = (T_{tn} - T_e)/T_{tn}$ であり，L_1, T_e, T_t, ϵ_t [%], g_1, ϵ_g [%], T_{tn}, ϵ_{tn} [%] と略記される．

4.1 振子実験はやて-No.1($r_0 = 8.35$ mm, $m = 29.9$ g)

測定値を **Table 3a**, **3b** に処理結果を **Table 3c**, **3d** に示す．

Table 3a 入力データ (線形振動)

0.2	0.2+r_0,9.38,9.37,9.34,9.34,9.43
0.4	0.4+r_0,13.00,12.94,12.93,12.97,13.00
0.6	0.6+r_0,15.78,15.84,15.75,15.72,15.75
0.8	0.8+r_0,18.06,17.91,18.13,18.09,18.19
1	1+r_0,20.28,20.09,19.96,20.00,20.09

Table 3b 入力データ (非線形振動)

0.2	0.2+r_0,9.47,9.53,9.53,9.50,9.47,0.1
0.4	0.4+r_0,13.06,13.09,13.09,13.06,13.10,0.2
0.6	0.6+r_0,15.94,15.91,15.94,15.94,15.90,0.3
0.8	0.8+r_0,18.35,18.28,18.35,18.31,18.34,0.4
1	1+r_0,20.63,20.60,20.63,20.65,20.66,0.5

Table 3c 線形振動の理論値との比較.

L_1	T_e, T_t, ϵ_t [%], g_1, ϵ_g [%]
0.20835	0.9372, 0.9161, −2.3, 9.3646, −4.4
0.40835	1.2968, 1.2826, −1.1, 9.5862, −2.2
0.60835	1.5768, 1.5655, −0.72, 9.6596, −1.4
0.80835	1.8076, 1.8045, −0.17, 9.7669, −0.34
1.00835	2.0084, 2.0155, 0.35, 9.8689, 0.70

Table 3c の 4 列目の線形振動周期の相対誤差 ϵ_t [%] が小さく，比較的良い測定値である (**Fig.2a**)．6 列目の重力加速度の相対誤差 ϵ_g [%] も，初めの 2 つのデータを除けば，小さいが，未だ g_S とはズレている．

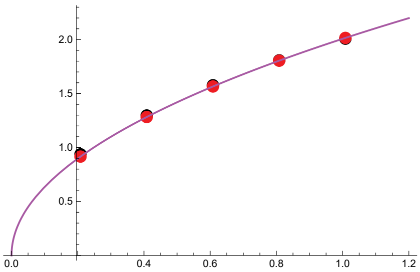

Fig.2a T_e (black) & T_t (red) versus L_1.

Table 3d 弱非線形振動の理論値との比較.

L_1	T_e, T_t, ϵ_t [%], g_1, ϵ_g [%], T_{tn}, ϵ_{tn} [%]
0.20835	0.95, 0.9161, −3.7, 9.1139, −7.0, 0.9323, 1.9
0.40835	1.308, 1.2826, −2, 9.4227, −3.8, 1.3051, 0.2
0.60835	1.5926, 1.5655, −1.7, 9.4689, −3.4, 1.593, −0.03
0.80835	1.8326, 1.8045, −1.6, 9.5022, −3.0, 1.8363, −0.2
1.00835	2.0634, 2.0155, −2.4, 9.3498, −4.6, 2.0509, 0.6

Table 3d の $\epsilon_t = (T_t - T_e)/T_t$ は線形理論に基づく誤差評価であり，弱非線形理論に基づく誤差評価 $\epsilon_{tn} = (T_{tn} - T_e)/T_{tn}$ の誤差の方が小さい (**Fig.2b**)．つまり，測定周期は弱非線形理論周期に良く合う.

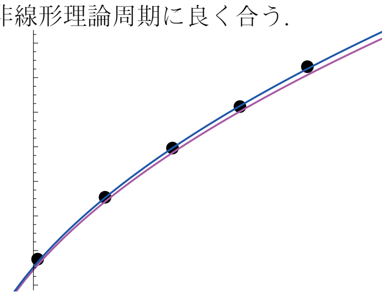

Fig.2b 非線形振動の測定周期 T_e (black mark) versus L_1. T_e は弱非線形振動の理論周期 T_{tn} (blue curve) と一致している．これは，線形振動の理論周期 T_t (red mark, red curve) とは明確に異なる.

4.2　振子実験つばさ-No.3($r_0 = 9.35$ mm, $m = 39.3$ g)

測定値を **Table 4a-4c** に処理結果を **Table 4d-4f** に示す.

Table 4a 入力データ (線形振動)

0.4	0.4+r_0,13.16,13.31,13.25,13.19,13.16,0.10
0.6	0.6+r_0,15.97,15.81,15.97,15.97,15.94,0.15
0.8	0.8+r_0,18.50,18.28,18.84,18.44,18.31,0.20
1	1+r_0,20.43,20.31,20.22,20.35,20.28,0.20
1.2	1.2+r_0,22.25,22.28,22.44,22.35,22.40,0.20

Table 4b 入力データ (非線形振動 01，$\theta_0 = \pi/6$)

0.4	0.4+r_0,13.31,13.31,13.32,13.44,13.32,0.20
0.6	0.6+r_0,16.19,16.25,16.35,16.28,16.16,0.30
0.8	0.8+r_0,18.50,18.47,18.31,18.41,18.47,0.40
1	1+r_0,20.50,20.60,20.53,20.50,20.63,0.50
1.2	1.2+r_0,22.62,22.56,22.57,22.72,22.57,0.60

Table 4c 入力データ (非線形振動 02，$\theta_0 = \pi/3$) この測定は，つばさ第 3 班のアイデアであり，非常に良い.

0.4	0.4+r_0,12.80,13.14,12.94,13.19,13.09,0.3464
0.6	0.6+r_0,16.16,16.12,15.83,15.57,16.08,0.5196
0.8	0.8+r_0,19.11,19.13,18.28,18.31,19.28,0.6928
1	1+r_0,20.48,20.22,21.18,21.38,21.59,0.866
1.2	1.2+r_0,22.32,22.40,22.34,22.28,22.19,1.039

Table 4d 線形振動の理論値との比較.

L_1	T_e, T_t, ϵ_t [%], g_1, ϵ_g [%]
0.40935	1.3214, 1.2842, −2.9, 9.2552, −5.6
0.60935	1.5932, 1.5668, −1.7, 9.4773, −3.3
0.80935	1.8474, 1.8057, −2.3, 9.3621, −4.5
1.00935	2.0318, 2.0165, −0.76, 9.6525, −1.5
1.20935	2.2344, 2.2072, −1.2, 9.5629, −2.4

Table 4e 弱非線形振動の理論値との比較 (1).

L_1	T_e, T_t, ϵ_t [%], g_1, ϵ_g [%], T_{tn}, ϵ_{tn} [%]
0.40935	1.334, 1.2842, −3.9, 9.0812, −7.3, 1.3067, 2.1
0.60935	1.6246, 1.5668, −3.7, 9.1145, −7, 1.5943, 1.9
0.80935	1.8432, 1.8057, −2.1, 9.4048, −4.0, 1.8374, 0.3
1.00935	2.0552, 2.0165, −1.9, 9.434, −3.7, 2.0519, 0.16
1.20935	2.2608, 2.2072, −2.4, 9.3409, −4.7, 2.2460, 0.66

Table 4d (線形振動) では，測定値と線形振動の理論周期はよく一致する.

Table 4e ($\theta_0 = \pi/6$) では，$\epsilon_t = (T_t - T_e)/T_t$ の線形理論に基づく誤差評価に対して，弱非線形理論に基づく誤差評価 $\epsilon_{tn} = (T_{tn} - T_e)/T_{tn}$ の誤差の方が小さい (**Fig.3a**). つまり，測定周期は弱非線形理論周期に良く合う.

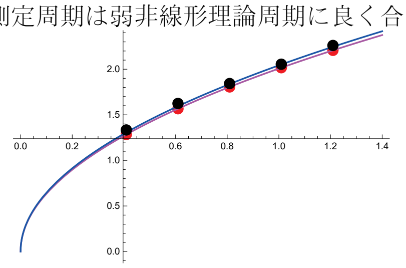

Fig.3a 非線形振動の測定周期 T_e (black mark) versus L_1. T_e は弱非線形振動の理論周期 T_{tn} (blue curve) と一致している．これは，線形振動の理論周期 T_t (red mark, red curve) とは明確に異なる.

Table 4f 弱非線形振動の理論値との比較 (2).

L_1	T_e, T_t, ϵ_t [%], g_1, ϵ_g [%], T_{tn}, ϵ_{tn} [%]
0.40935	1.3032, 1.2842, −1.5, 9.5155, −2.9, 1.3824, −5.7
0.60935	1.5952, 1.5668, −1.8, 9.4536, −3.5, 1.6866, −5.4
0.80935	1.8822, 1.8057, −4.2, 9.0191, −8, 1.9438, −3.1
1.00935	2.097, 2.0165, −4, 9.0616, −7.5, 2.1707, −3.4
1.20935	2.2306, 2.2072, −1.1, 9.5955, −2.1, 2.3761, −6.1

Table 4f では，$\epsilon_t = (T_t - T_e)/T_t$ の線形理論に基づく誤差評価に対して，弱非線形理論に基づく誤差評価 $\epsilon_{tn} = (T_{tn} - T_e)/T_{tn}$ の誤差の方が小さい場合と大きい場合がある (**Fig.3b**)．初期に大振幅を与える場合，実験・測定上で困難な問題が発生していると判断される.

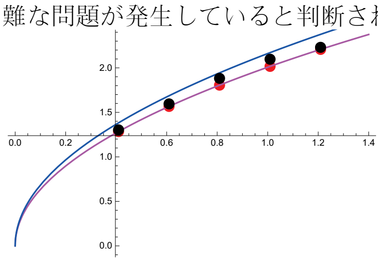

Fig.3b 非線形振動の測定周期 T_e (black mark) versus L_1. T_e は理論周期 T_{tn} (blue curve) と一部一致している.

4.3 振子実験はやぶさ-No.4($r_0 = 9.25$ mm, $m = 29.3$ g)

測定値を **Table 5a**, **5b** に処理結果を **Table 5c**, **5d** に示す.

Table 5a 入力データ (線形振動) 初期角度
$\theta_0 = 10° = 10\pi/180$, 最後の列は $L_2 = L_1 \sin(\theta_0)$
$\theta_0 = 10$ [deg]= $10\pi/180$ [rad]

1.6	1.6+r_0,25.35,25.37,25.43,25.35,25.41,0.28
1.4	1.4+r_0,23.78,23.78,23.81,23.75,23.72,0.24
1.2	1.2+r_0,22.01,21.94,22.03,21.94,21.94,0.21
1	1+r_0,20.15,20.03,20.09,20.18,20.32,0.17
0.8	0.8+r_0,17.97,18.04,18.02,18.00,18.05,0.14

Table 5b 入力データ (弱非線形振動) 初期角度
$\theta_0 = 30° = \pi/6$, 最後の列は $L_2 = L_1 \sin(\theta_0)$
θ=30 [deg]= 30 ∗ PI/180[rad] $= \pi/6$ [rad]

1.6	1.6+r_0,25.75,25.81,25.84,25.69,25.60,0.8
1.4	1.4+r_0,24.03,24.03,23.90,24.00,24.06,0.7
1.2	1.2+r_0,22.29,22.25,22.25,22.26,22.27,0.6
1	1+r_0,20.34,20.46,20.53,20.47,20.25,0.5
0.8	0.8+r_0,18.13,18.28,18.28,18.37,18.44,0.4

Table 5c 弱非線形振動の理論値との比較 (1).

L_1	T_e, T_t, ϵ_t [%], g_1, ϵ_g [%], T_{tn}, ϵ_{tn} [%]
1.60925	2.5382, 2.5461, 0.31, 9.8612, 0.62, 2.551, -0.50
1.40925	2.3768, 2.3827, 0.25, 9.8483, 0.49, 2.3872, -0.44
1.20925	2.1972, 2.2071, 0.45, 9.8886, 0.90, 2.2113, -0.64
1.00925	2.0154, 2.0164, 0.047, 9.8093, 0.09, 2.0202, -0.24
0.80925	1.8016, 1.8055, 0.22, 9.843, 0.4, 1.809, -0.41

Table 5c では, $\epsilon_t = (T_t - T_e)/T_t$ の線形理論に基づく誤差評価に対して, 弱非線形理論に基づく誤差評価 $\epsilon_{tn} = (T_{tn} - T_e)/T_{tn}$ の誤差の方が小さい. つまり, 測定周期は弱非線形理論周期に良く合う (**Fig.4a**). 重力加速度の相対誤差も小さいが, $g > 9.8$ であるから g_S からずれており, 線形振動による g (黒色) よりも弱非線形振動 (3.2) 式による g_n (青色) の値の方が大きく, 2 つの値は近いが異なることが分る (**Fig.4b**).

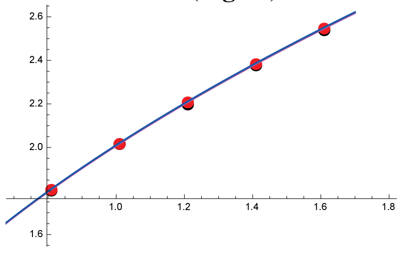

Fig.4a T_e (black) & T_t (red) versus L_1.

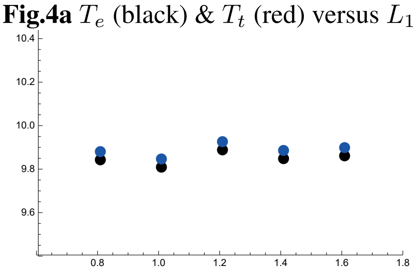

Fig.4b g (black, linear theory) and g_n (blue, weakly nonlinear theory Eq.(3.2)) versus L_1 for $\theta_0 = \pi/18$.

Table 5d 弱非線形振動の理論値との比較 (2).

L_1	T_e, T_t, ϵ_t [%], g_1, ϵ_g [%], T_{tn}, ϵ_{tn} [%]
1.60925	2.5738, 2.5461, −1.1, 9.5903, −2.1, 2.5909, −0.66
1.40925	2.4004, 2.3827, −0.74, 9.656, −1.5, 2.4246, −1
1.20925	2.2264, 2.2071, −0.87, 9.631, −1.7, 2.2459, −0.87
1.00925	2.041, 2.0164, −1.2, 9.5647, −2.4, 2.0518, −0.5
0.80925	1.83, 1.8055, −1.4, 9.5398, −2.7, 1.8373, −0.4

Table 5d では, $\epsilon_t = (T_t - T_e)/T_t$ の線形理論に基づく誤差評価に対して, 弱非線形理論に基づく誤差評価 $\epsilon_{tn} = (T_{tn} - T_e)/T_{tn}$ の誤差の方が小さい (**Fig.4c**). つまり, 測定周期は弱非線形理論周期に良く合う.

$g < 9.8$ (**Fig.4d** の線形振動の評価) であり, KTJ08 の測定値の中で測定誤差は最も小さいが, 測定誤差は重力加速度の差異 $(g_S - 9.8)/9.8 = 0.24\%$ の 10 倍程度ある. $\theta_0 = \pi/6$ であるから, 弱非線形振動 (3.2) による重力加速度の値は線形振動による値よりも大きく, その差異が大きくなっている.

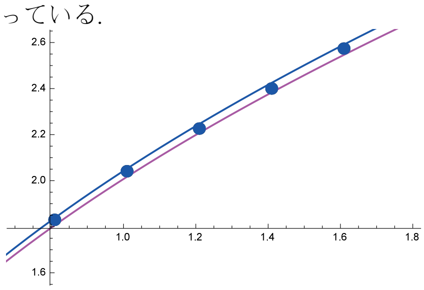

Fig.4c 非線形振動の測定周期 T_e (blue mark) versus L_1. T_e は弱非線形振動の理論周期 T_{tn} (blue curve) と一致している. これは, 線形振動の理論周期 T_{tn} (red mark, red curve) とは明確に異なる.

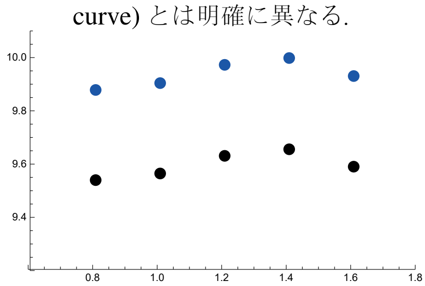

Fig.4d g (black, linear theory) and g_n (blue, weakly nonlinear theory Eq.(3.2)) versus L_1 for $\theta_0 = \pi/6$.

5 おわりに

本報告では, 2 年目の KTJ08 の振子実験を取り上げ, その成果を示した. 要約すると, 次のようになる.

(1) 実験での周期の測定量を KTJ08 では倍に増やしたが, 限られた時間内に実験可能であることが示された. つまり,「振子の糸の長さを 5 種類, それらの 10 周期の時間を 5 回測定する」実験を 2 回実施することができた. 線形振動と弱非線形振動の周期の測定が可能となった. 同時に, 測定精度の一定の向上が見られた. 特に, 実験前の授業時間に実験の解説やデモ等を行い測定器具の使

い方 (ストップウォッチ，ノギス (0.02 mm)，物差) と実験方法を予習しておくと，正確に速く測れて，実験時間を非常に有効に利用できる．

(2) 測定器具の使い方に習熟するよう，授業で補助学習する．ノギスの使い方は日本では中学校で学習するが，マレーシアでは高校課程とのことである．測定精度を上げるためにストップウォッチの使い方も工夫する．「正確に速く測ること」は技術者教育に欠かせないので，高専への留学前の予備教育として，改めて実験での学習が位置づけられる．また，実験内容に即した演習や試験を行い，実験で修得した知識の到達度を上げる．

(3) 現在，錘 (30 g の真鍮の球) と市販の糸の振子を実験机の上の力学スタンドに繋ぎ，初期角度 θ_0 から静かに放して振子運動させ，10 周期をストップウォッチで測定している．この装置の場合，$\theta_0 = \pi/6$ の振子運動はかなり正確に測定できる．しかし，$\theta_0 = \pi/3$ の振子運動 (**Table 4f**，**Fig.3b**) では，力学スタンドの支持点の揺れが起こり，錘の振子運動の空気抵抗による減衰が無視できない．改良点として，錘の質量を大きくして減衰効果を抑制し，支持点の強度を上げて揺れを抑えることが挙げられる．

(4) 振子の実験にあたり，「初期角度を測定して，単振動させ，振動周期を測る」という方法が効果的である．「振子の等時性により，初期角度に依らない」として，初期角度を測らずに振動周期のみ測ることは良策ではない．文献 [11] でも，定量的理解までを明確に意識した第 5 学年で学ぶ「振り子の運動」として取り上げ，小学校 5 年の理科教科書に「[実験 1] 長さ 50 cm の振り子を使い，振れ幅が大きいときと，小さいときで 10 往復する時間を 3 回測り，1 往復する時間を計算して比べる．」と初期振幅依存性が実験項目にあることを指摘している．

(5) 周期測定の測定機器の改良・変更が挙げられる．錘が最下点を通過するときにストップウォッチを開始/終了としているが，個人差があり，誤差の原因となっている．電子的測定装置の導入が望まれる．

(6) 単振子の線形振動は，日本では教程の改定により，小学校 5 年の必修実験となったこと [12] や小中高校課程の振子学習の繋がり [13] や非線形振動の (3.2) 式は高専の 2 年生が解析できたこと [9] 等は教材として提供した．

(7) 測定精度を挙げるため，周期を評価する近似式:[14]

$$\omega_7 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\theta_a^2}{8} + \frac{\theta_a^4}{192} - \frac{\theta_a^6}{9216}}$$

を導いた．これを用いると，周期の理論値との差異は，$\theta_a = \pi/2$ のときに 0.2% 以内となる．また，重力加速度の評価にも用いて測定精度の向上が期待できる．

本報告では，KTJ 物理学実験の「S4(1) 単振子の振動 (小振幅の振動周期と振子の等時性，g の測定，大振幅の振動周期)」を取り上げ，2 年目の KTJ08 物理学実験として取組み，学生諸君の努力と知恵により大きな成果が得られた．ここに記して，謝意を表します．

参考文献

[1] MQA (Malaysian Qualifications Agency, Agensi Kelayakan Malaysia) http://www.mqa.gov.my/

[2] 舟田 敏雄: “KTJ07 Semester 3, 4 の物理実験テーマ” (内部資料) KTJ, INTEC, 2015.

[3] 舟田 敏雄，大脇 雅信，アフィック ビン モハマド ジョハリ，大庭 勝久: “KTJ07 教程への物理学実験の導入: 物体とバネの静釣合試験と振動実験” 沼津高専研究報告 第 50 号 (2016), pp.75-80.

[4] 物理 I 実験プリント (教科書『改訂版　高等学校物理 I』(物 I /014) 対応)，数研出版.

[5] 住所から緯度経度を調べる - chireki.com http://www.chireki.com/earth/geocoding.htm

[6] 原島 鮮: 力学 (改訂版)，裳華房 (1966 年刊) §7.4

[7] 戸田 盛和: 力学，物理学入門シリーズ，岩波書店，1982.

[8] Wolfram Alpha Widgets: “Local Acceleration of Gravity, Kuala Lumpur (KL) $g = 9.77603$ m/s^2, Shah Alam $g = 9.7761$ m/s^2. http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=e856809e0d522d3153e2e7e8ec263bf2

[9] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 青木 悠祐, 宮内 太積: “技術者教育のための工業力学教材の整備 (5): 技術者教育再発見” 沼津高専研究報告 第 47 号 (2013), pp.45-50.

[10] 地球の重力 https://ja.wikipedia.org/wiki/地球の重力

[11] 塩野 正明，松村 敬治: “小学校理科における「振り子の運動」の実験指導と誤差の扱いについて” 西南学院大学 人間科学論集 第 7 巻 第 1 号 pp.107-121, 2011 年 8 月 http://repository.seinan-gu.ac.jp/bitstream/handle/123456789/499/hs-n7v1-p107-121-shi.pdf

[12] 文部科学省: “小学校学習指導要領解説 理科編” http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2010/12/28/1231931_05.pdf

[13] 鹿児島県総合教育センター: “小・中・高等学校のつながりを考慮した指導の工夫 - 振り子の運動の学習を通して - ” 理科 第 288 号，- 小学校中学校高等学校特別支援学校対象 -，平成 24 年 10 月発行 http://www.edu.pref.kagoshima.jp/research/result/siryou/shidosiryou/h24/1745-rika288.pdf

[14] 大庭 勝久，舟田 敏雄: “技術者教育のための工業力学教材の整備 (14): 単振子の大振幅振動の修正 Lindstedt-Poincaré 法による解析” 沼津高専研究報告 第 50 号 (2016), pp.45-50.