大気の抵抗があるときの固体球の落下運動

大庭 勝久 [*1] 舟田 敏雄 [*2]

Free Fall of a Solid Sphere under Air Resistance

Katsuhisa OHBA[*1] and Toshio FUNADA[*2]

Abstract: A solid sphere (rain drop) falls freely in atmosphere under air resistance. The resistance proportional to the sphere velocity is introduced in a textbook of high-school physics, but the resistance proportional to the square of the velocity should be compensated as realistic phenomena from the standpoint of fluid mechanics. Both resistance mechanisms are treated as a unified manner in this report, and it is found that the two mechanisms can work well according to the values of Reynolds number. A short comment for a rain drop (liquid) is made based upon the viscous potential flow analysis.

Keywords: Free Fall of Solid Sphere, Air Resistance Proportional to the Sphere Velocity and to the Square of the Velocity

1 はじめに

雨粒が空気中を運動するとき空気の抵抗を受けることが教科書 (「物理基礎」,「物理」)[1] に解説されている．物理基礎 pp.71-72「空気の抵抗」と物理 pp.22-23「空気の抵抗」には「雨粒が，重力だけを受けて自由落下する場合を考えよう．雨粒が 1000 m 落下したときの速さ v [m/s] を (18) 式より計算すると，$v = 140$ m/s となる．しかし，実際は大粒の雨でも 10 m/s 程度である．これは，雨粒が空気の抵抗を受けるためである．摩擦と同様に，空気の抵抗が運動を妨げる向きに働くため，雨粒はさほど加速されずに地面に到達する.」と解説され，続いて「空気の抵抗力と終端速度」の項で「速度に比例する抵抗力」の説明になる．しかし，速度に比例する抵抗の場合には小粒の雨のとき終端速度 $v = 0.1 \sim 1$ m/s の等速度運動となり，速度の二乗に比例する抵抗の場合には大粒の雨のとき終端速度約 $v = 11$ m/s の等速度運動となる．つまり，**速度に比例する抵抗の場合，大粒の雨で 10 m/s 程度の等速度運動にはならない**ことに注意する必要がある．

これを補うために，空気の抵抗は，Newton の抵抗法則で表現され，物体の速度に比例する抵抗 (Stokes の抵抗法則) と物体の速度の二乗に比例する抵抗があり，その抵抗法則の適用範囲が Reynolds 数に依ることは KTJ06 の補助教材に示して来た．ここでは，空気中を落下する固体球に対し，実際に 2 つの抵抗法則を用いて計算した終端速度の例を示す．

本報告では，前述の視点から，教材開発・教程の改善・高度化を進めて来た物理学実験事例 [2] を解説し，この間の成果と次の課題を述べる．

[*1] 電子制御工学科: Department of Electronic Control System Engineering.

[*2] 沼津高専 名誉教授: Professor emeritus. 現在は，国際教育カレッジ (INTEC) 高専予備教育コース (KTJ): KTJ, DPT, International Education College, UiTM Section 17 Campus, 40200, Shah Alam, Selangor, Malaysia.

2 流体力学で得られている抵抗法則

空気の質量密度を ρ_a，粘性係数を μ_a，動粘性係数を $\nu_a = \mu_a/\rho_a$，固体球 (雨滴，球状水滴とみなす) の半径を a，空気の流れの代表速度を v と表すと，物体に働く抵抗力 D の測定値の特性は抗力係数 $C_D = D/\left(\dfrac{\rho_a}{2}v^2 S\right)$ (縦軸) と流れの Reynolds 数 $R_e = 2av/\nu_a = 2av/(\mu_a/\rho_a)$ (横軸) の図 (**Fig.1**) に示されており，$R_e < 1$ の層流領域，$1 < R_e < 2975$ の遷移領域，$2975 < R_e$ の乱流領域に大別される．但し，流れに垂直な物体の断面積 S は球の場合 $S = \pi a^2$ である．通常，流れの速度を変えて静止固体球に働く抵抗力を測定するが，ここでは，静止大気中を落下する固体球 (球状水滴) に適用する．

y 軸を鉛直下方とするデカルト座標系を取り，重力加速度を g として，質量 $m_1 = \rho\dfrac{4\pi}{3}a^3$ ($\rho = 1000$ kg/m^3 は水の密度) の固体球 (球状水滴) の位置を $y_1 \equiv y_1(t)$ (t: 時間) と表すと，固体球の運動方程式は次式で与えられ，固体球の速度 $v = \mathrm{d}y_1/\mathrm{d}t$ の 1 階微分方程式となる:

$$m_1\ddot{y}_1 = m_1 g - D \ \rightarrow\ m_1\dot{v} = m_1 g - D \tag{2.1}$$

この式の右辺の抵抗力 D は，v や a 等の関数であり，R_e 数の値に依って異なる値を取る．$R_e < 1$ の層流領域で成り立つ速度に比例する抵抗力 $D = k_1 v$ は Stokes の抵抗法則と呼ばれており，流体力学の理論により $D = 6\pi a\mu_a v$ (即ち，$k_1 = 6\pi a\mu_a$) と解析的に導出されるから，抵抗係数は $C_D = D/\left(\dfrac{\rho_a}{2}v^2\pi a^2\right) = 6\pi a\mu_a v/\left(\dfrac{\rho_a}{2}v^2\pi a^2\right) = 24\mu_a/(\rho_a v 2a) = 24/R_e$ と表現される．

$1 < R_e < 2975$ の遷移領域では，実験値により，抵抗係数は $C_D = 24/\sqrt{R_e}$ と表される．この遷移領域については文献 [3] を参照することとし，ここでは扱わない．

$2975 < R_e$ の乱流領域では，速度の二乗に比例する抵

抗力を $D = k_2 v^2$ ($k_2 = C_D \dfrac{\rho_a}{2} S$，$C_D = 0.4 \sim 0.5$) と表す．**Fig.1** では $R_e \geq 400000$ で C_D 値はさらに変化する．

速度に比例する抵抗の解析は，KTJ での物理教程範囲をやや超えるが，KTJ06 でも学習した [4]．高専の力学の専門基礎では，流体摩擦力による抵抗の代表なので，講義する．速度の二乗に比例する抵抗の実験値は講義で紹介するが，その解析は卒業研究の学生に教える程度となる．

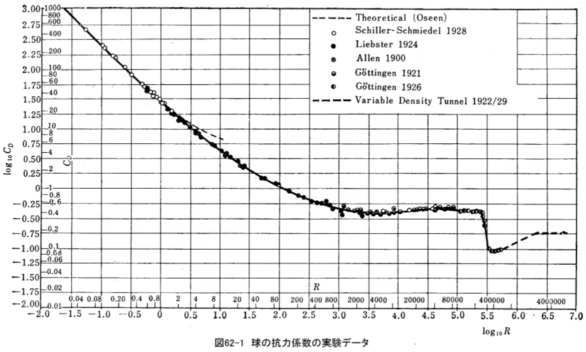

Fig.1 球の抵抗係数 C_D の実験データ．熱力学と流体「62章:流れの中の球体の抗力 [5] http://homepage3.nifty.com/skomo/f28/hp28 62.htm」より転載．Reynolds 数 $R = R_e$ (横軸) は，$R_e = 2av_\infty/(\mu_a/\rho_a)$ (v_∞ は代表的な速度) と定義され，流れの特性を表す．流体による抵抗力 D (実測値) は，抵抗係数 C_D ($D = C_D \dfrac{\rho_a}{2} v_\infty^2 S$) に書き換える．

それぞれの抵抗法則の終端速度 $v_{1\infty}, v_{2\infty}$ を用いて定義した Reynolds 数について，$R_{e1} = v_{1\infty} 2a/\nu_a = 1$ を与える固体球 (球状雨滴) の半径は $a = 3.97592 \times 10^{-5}$ m となるから，これ以下の小さい固体球 (雨滴) に Stokes の抵抗法則が適用される．また，$R_{e2} = v_{2\infty} 2a/\nu_a = 1$ を与える固体球 (球状雨滴) の半径は $a = 1.09402 \times 10^{-5}$ m となり，$R_{e2} = v_{2\infty} 2a/\nu_a = 2975$ を与える固体球の半径は $a = 2.26299 \times 10^{-3}$ m となるから，$a \geq 2.26299 \times 10^{-3}$ m の大きな固体球に速度の 2 乗に比例する抵抗法則が適用される．なお，雨滴は半径 1 mm 程度までは球形であるが，それ以上に大きいと球から変形するので，体積を変えずに球形にしたときの相当半径を用いて表現する [6]．また，雨粒の大きさは，通常は直径 1 mm 前後で，概ね直径 0.2∼6 mm の範囲内にある．直径 6 mm を超えるような大きな雨粒は分裂し易く観測され難い [7]．即ち，固体球で雨滴を近似できる半径の上限が 1 mm であると言える．

Stokes の抵抗法則の場合，$k_1 = 6\pi a \mu_a$ と空気の粘性係数 $\mu_a = 1.82 \times 10^{-6}$ Pa s を用い，終端速度 v_{1t} を得る:

$$v_{1t} = \frac{mg}{k_1} = \rho \frac{4\pi a^3}{3} \frac{g}{6\pi a \mu_a} = 1.19658 \times 10^8 a^2 \quad (2.2)$$

対応して，$R_{e1} = v_{1t} 2a/\nu_a = 1.59106 \times 10^{13} a^3$ である．

速度の 2 乗に比例する抵抗法則の場合には，$C_D = 0.4 \sim 0.5$ (**Fig.1**) より $k_2 = C_D \dfrac{\rho_a}{2} \pi a^2 = 0.25 \rho_a \pi a^2$ と表されるから，空気の密度 $\rho_a = 1.21$ kg/m^3 を用い，終端速度 v_{2t} を得る:

$$v_{2t} = \sqrt{\frac{mg}{k_2}} = \sqrt{\rho \frac{4\pi a^3}{3} \frac{g}{0.25 \rho_a \pi a^2}} = \sqrt{\frac{16 \rho g}{3 \rho_a} a}$$
$$= 207.835 \sqrt{a} \quad (2.3)$$

よって，終端速度は固体球 (球状雨滴) の半径の平方根に比例して，$R_{e2} = v_{2t} 2a/\nu_a = 2.76353 \times 10^7 a^{3/2}$ と表される．これの適用範囲は，R_e 数で $2975 < R_e < 2 \times 10^5$，固体球 (球状雨滴) の半径で 2.26299×10^{-3} m$< a <$ 0.0593924 m である (**Fig.2**)．

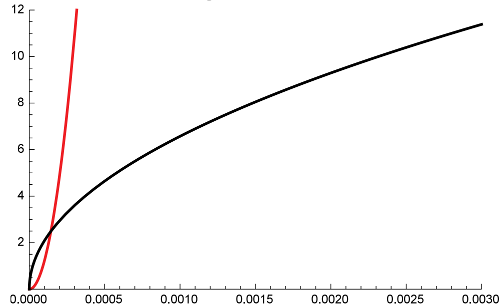

Fig.2 v [m/s] (縦軸) 対 固体球 (球状雨滴) の半径 a [m] (横軸)．速度の 2 乗に比例する抵抗力が働く場合の終端速度 v_{2t} (黒色)．速度に比例する抵抗力の終端速度 v_{1t} (赤色)．

以上の考察より，幾つかの固体球 (球状雨滴) の半径について計算すると，**Table 1** の結果が得られる．

Table 1 固体球 (球状雨滴) の半径と落下速度 (終端速度)

	半径 a [m]	落下速度 v_t [m/s]
雲粒	$1. \times 10^{-6}$	1.19658×10^{-4} (v_{1t})
霧雨粒	0.00001	0.0119658 (v_{1t})
霧と雨の境	0.0001	1.19658 (v_{1t})
雨粒	0.0008	5.87848 (v_{2t})
雨粒	0.001	6.57234 (v_{2t})
雨粒	0.002	9.29469 (v_{2t})
雨粒	0.003	11.3836 (v_{2t})

なお，**Table 1** で，3.97592×10^{-5} m$< a < 2.26299 \times 10^{-3}$ は遷移領域の抵抗法則に従うので，注意する．

もっと大きな雨粒は，安定には存在できず，小さな雨粒に分裂して降って来る．そのことは，別の流体力学的機構による．また，正確には，周囲流体による浮力が働く．空気中の雨滴は，空気の浮力よりも雨滴の自重が大きく雨滴は落下する．

3　空気抵抗がある場合の固体球 (球状雨滴) の落下運動 (力学解析)

半径 a_1，密度 ρ_l の球状雨滴 (水滴) が，上空の高さ h_0 の位置から大気中を自由落下し地面に到達する力学問題を考える．固体球 (球状雨滴) の質量 m は $m = \rho_l \dfrac{4}{3} \pi a_1^3$ であり，球状雨滴は落下中に変形しないもの (固体球) とする．球状雨滴と大気の物性値の高さや温度による変化は

考えない．高さ h_0 の位置を座標原点とし，鉛直下方に y 軸を取る．重力加速度を $g = 9.8$ m/s^2 とする．

先ず，抵抗の無い場合の固体球 (球状雨滴) の位置 $y_0 \equiv y_0(t)$ (t: 時間) と速度 $v_0 \equiv v_0(t) = \dot{y}_0$ ($\dot{y}_0 = \mathrm{d}y_0/\mathrm{d}t$) に対して，自由落下の運動方程式 ($m\dot{v}_0 = mg$) より，初速度 zero の「等加速度運動」の解を得る:

$$y_0(t) = \frac{g}{2}t^2,\ v_0(t) = gt \tag{3.1}$$

次に，速度に比例する抵抗の場合の固体球 (球状雨滴) の位置を $y_1 \equiv y_1(t)$，速度を $v_1 \equiv v_1(t)$ と表すと，自由落下の運動方程式は次式となる:

$$m\dot{v}_1(t) = mg - c_1 v_1(t) \tag{3.2}$$

c_1 は抵抗係数である．(3.2) 式は定数係数の線形非同次の 1 階微分方程式であり，平衡解 (定数の解) $v_{1t} = mg/c_1$ を持ち，(3.2) 式の初速度 zero の解は次のように表される:

$$v_1(t) = \frac{mg}{c_1}\left(1 - e^{-\frac{c_1}{m}t}\right) \tag{3.3}$$

この解は，初速度 zero で落下が始まり，$t \to \infty$ で終端速度 $v_{1t} = mg/c_1$ (等速度運動) に近づく．指数関数 $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0, t \geq 0$) は $e^{-6} = 0.00247875 \sim 0$ となるから，速度 $v_1(t)$ が終端速度に近づく特徴時間 (時定数の 3 倍) t_{1t} は $t_{1t} = 6/\alpha = 6m/c_1$ と評価される．(3.3) 式を用い，位置 y_1 の方程式は次式となる:

$$\dot{y}_1(t) = v_1(t) \tag{3.4}$$

これを t で積分し初期位置 zero により，解 $y_1(t)$ を得る:

$$y_1(t) = \frac{mg}{c_1}t - \frac{m^2 g}{c_1^2}\left(1 - e^{-\frac{c_1}{m}t}\right) \tag{3.5}$$

次に，速度の二乗に比例する抵抗の場合の固体球 (球状雨滴) の位置を $y_2 \equiv y_2(t)$，速度を $v_2 \equiv v_2(t)$，抵抗係数を c_2 と表すと，自由落下の運動方程式は次式となる:

$$m\dot{v}_2(t) = mg - c_2 v_2^2(t) \tag{3.6}$$

(3.6) 式は定数係数の非線形 1 階微分方程式であり，平衡解を 2 つ持ち，有意な解 v_{2t} は次式となる:

$$v_{2t} = \sqrt{\frac{mg}{c_2}} \tag{3.7}$$

(3.6) 式から，初速度 zero の解 $v_2(t)$ を得る:

$$v_2(t) = \sqrt{\frac{mg}{c_2}}\tanh\left[\sqrt{\frac{c_2 g}{m}}t\right] \tag{3.8}$$

この解は，初速度 zero で落下が始まり，$t \to \infty$ で終端速度 $v_{2t} = \sqrt{mg/c_2}$ (等速度運動) に近づく．また，双極線関数 $\tanh(\beta t)$ は $\tanh(3) = 0.995055 \sim 1$ となるから，速度 $v_2(t)$ が終端速度に近づく特徴時間 (時定数の 3 倍) t_{2t} は $t_{2t} = 3/\beta = 3\sqrt{m/(c_2 g)}$ と評価される．(3.8) 式を用い，固体球の位置 y_2 の方程式は次式となる:

$$\dot{y}_2(t) = v_2(t) \tag{3.9}$$

これを t で積分し初期位置 zero により，解 $y_2(t)$ を得る:

$$y_2(t) = \frac{m}{c_2}\mathrm{Log}\left[\cosh\left[\sqrt{\frac{c_2 g}{m}}t\right]\right] \tag{3.10}$$

次に，速度に比例する抵抗と速度の二乗に比例する抵抗が共存する場合の固体球 (球状雨滴) の位置を $y_3 \equiv y_3(t)$，速度を $v_3 \equiv v_3(t)$，抵抗係数を c_1, c_2 と表すと，自由落下の運動方程式は次式となる:

$$m\dot{v}_3(t) = mg - c_1 v_3 - c_2 v_3^2(t) \tag{3.11}$$

(3.11) 式は定数係数の非線形 1 階微分方程式であり，平衡解を 2 つ持ち，有意な解 v_{3t} は次式となる:

$$v_{3t} = \frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4mgc_2}}{2c_2} \tag{3.12}$$

ここで，$v_3(t) = v_{3t} + v_{31}(t)$ とおき，(3.11) 式は次のように書き替えられる:

$$m\dot{v}_{31}(t) + \sqrt{c_1^2 + 4mgc_2}\, v_{31}(t) + c_2 v_{31}(t)^2 = 0 \tag{3.13}$$

これを解き，初速度 zero の解 $v_3(t) = v_{3t} + v_{31}(t)$ を得る:

$$v_3(t) = \frac{2mg}{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4mgc_2}\coth\left[\dfrac{\sqrt{c_1^2 + 4mgc_2}t}{2m}\right]} \tag{3.14}$$

この解に含まれている双曲線関数の特性値 $\coth(3) \sim 1$ を用いることにすると，速度 $v_3(t)$ が終端速度 $v_{3t} = 2mg/\left(c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4mgc_2}\right)$ に近づく特徴時間 (時定数の 3 倍) t_{3t} は，$t_{3t} = 6m/\sqrt{c_1^2 + 4mgc_2}$ と評価される．

(3.14) 式を用い，固体球 (球状雨滴) の位置 y_3 の方程式は次式となる:

$$\dot{y}_3(t) = v_3(t) \tag{3.15}$$

これを t で積分し初期位置 zero により，解 $y_3(t)$ を得る:

$$\begin{aligned} y_3(t) = {}& \frac{-c_1}{2c_2}t + \frac{m}{2c_2}\Bigg(-\mathrm{Log}\left[c_1^2 + 4mgc_2\right] \\ & +\mathrm{Log}\left[c_1^2 + 2mgc_2 + 2mgc_2\cosh\left[\frac{\sqrt{c_1^2 + 4mgc_2}t}{m}\right]\right] \\ & +2\mathrm{arctanh}\left[\frac{c_1\tanh\left[\frac{\sqrt{c_1^2+4mgc_2}t}{2m}\right]}{\sqrt{c_1^2 + 4mgc_2}}\right]\Bigg) \end{aligned} \tag{3.16}$$

ここに示した速度に比例する抵抗と速度の二乗に比例する抵抗が共存する場合の解は，1 階の非線形微分方程式の解析解であることに注意する．

以上に求めた解の振舞は，次節の計算例に示される．

4 空気抵抗がある場合の固体球 (球状雨滴) の落下運動の計算例

静止している空気中を落下する固体球 (球状雨滴) の密度を $\rho = 10^3$ kg/m^3 とし，空気の密度を $\rho_a = 1.21$ kg/m^3，粘性係数を $\mu_a = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa s とする．固体球 (球状雨滴) の代表的な半径として，$a_1 = 3 \times 10^{-3}$ m (大きい雨粒) と $a_1 = 3 \times 10^{-5}$ m (小さい雨粒) の 2 つの場合を考える．終端速度の特徴は速度の解で解析できるが，初期高さ $h_0 = 1$ km から地面に到達する落下時間を求める．前節で求めた式を用いて解析した結果，$a_1 = 3 \times 10^{-3}$ m の

大きな球状雨滴 (固体球) の計算結果が **Table 2** と **Fig.3a**, **3b**, **4c** に示され，速度の二乗に比例する抵抗力が適用される．一方，$a_1 = 3 \times 10^{-5}$ m の小さな球状雨滴 (固体球) の計算結果が **Table 3** と **Fig.4a**, **4b** に示され，速度に比例する抵抗力が適用される．また，速度に比例する抵抗力と速度の二乗に比例する抵抗力が共存する場合の (3) は，2 つの抵抗法則をうまく棲み分けていることが分る．

Table 2 Falling of a sphere of radius $a_1 = 3 \times 10^{-3}$ m (big rain drop), for which $m = 4\pi\rho a_1^3/3 = 1.13097 \times 10^{-4}$ kg, (1) $c_1 = 6\pi\mu_a a_1 = 1.01788 \times 10^{-6}$ N/(m/s) (Stokes' law)，(2) $c_2 = 0.25\rho_a \pi a_1^2 = 8.55299 \times 10^{-6}$ N/(m/s)^2 (Newton's law of drag force) and (3) with c_1 and c_2. $v_\infty = \{v_{1t}, v_{2t}, v_{3t}\}$ and $t_{xt} = \{t_{1t}, t_{2t}, t_{3t}\}$.

Case	v_∞ [m/s]	R_e	t_{xt} [s]
(1)	1088.89	439185	666.667
(2)	11.3836	4591.39	3.48478
(3)	11.3243	4567.46	3.48473

Table 3 Falling of a sphere of radius $a_1 = 3 \times 10^{-5}$ m (small rain drop), for which $m = 4\pi\rho a_1^3/3 = 1.13097 \times 10^{-10}$ kg, (1) $c_1 = 6\pi\mu_a a_1 = 1.01788 \times 10^{-8}$ N/(m/s), (2) $c_2 = 0.25\rho_a \pi a_1^2 = 8.55299 \times 10^{-10}$ N/(m/s)^2 and (3) with c_1 and c_2. $v_\infty = \{v_{1t}, v_{2t}, v_{3t}\}$ and $t_{xt} = \{t_{1t}, t_{2t}, t_{3t}\}$.

Case	v_∞ [m/s]	R_e	t_{xt} [s]
(1)	0.108889	0.439185	0.0666667
(2)	1.13836	4.59139	0.348478
(3)	0.10791	0.435239	0.0654792

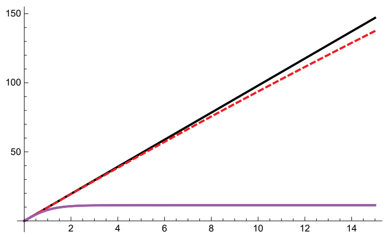

Fig.3a $v_0(t)$ m/s (black), (1) $v_1(t)$ m/s (dashed red), (2) $v_2(t)$ m/s (blue) and (3) $v_3(t)$ m/s (magenta) versus time t s, for $a_1 = 3 \times 10^{-3}$ m. Refer to the data in **Table 2**. The realistic case is given by (2) for Newton's law of drag.

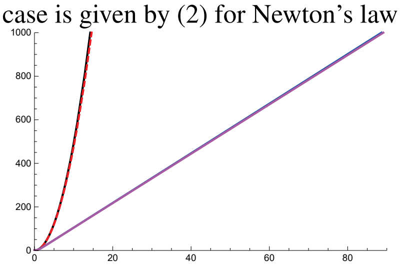

Fig.3b $y_0(t)$ m (black), (1) $y_1(t)$ m (dashed red), (2) $y_2(t)$ m (blue) versus time t s, for $a_1 = 3 \times 10^{-3}$ m. The arrival time to the ground is $t_0 = 14.2857$ s, (1) $t_1 = 14.5985$ s, (2) $t_2 = 88.6507$ s and (3) $v_3(t)$ m/s (magenta). Refer to the data in **Table 2**. The realistic case is given by (2) for Newton's law of drag.

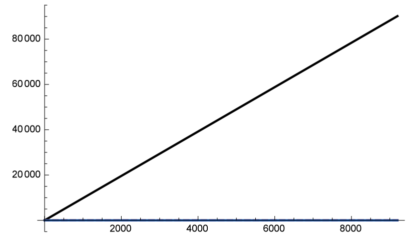

Fig.4a $v_0(t)$ m/s (black), (1) $v_1(t)$ m/s (dashed red), (2) $v_2(t)$ m/s (blue) and (3) $v_3(t)$ m/s (magenta) versus time t s, for $a_1 = 3 \times 10^{-5}$ m. Refer to the data in **Table 3**. The realistic case is given by (1) for Stokes' law.

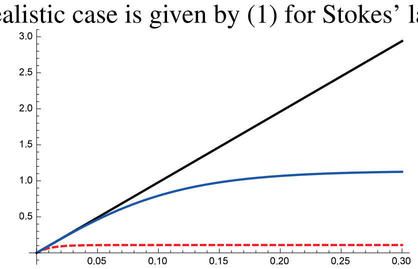

Fig.4b $v_0(t)$ m/s (black), (1) $v_1(t)$ m/s (dashed red), (2) $v_2(t)$ m/s (blue) and (3) $v_3(t)$ m/s (magenta) versus time t s, for $a_1 = 3 \times 10^{-5}$ m in magnified scale of **Fig.4a**.

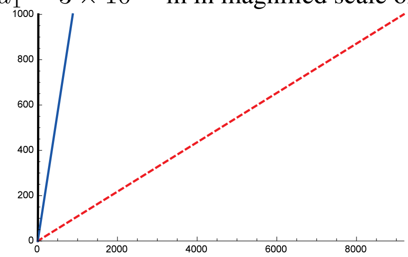

Fig.4c $y_0(t)$ m (black), (1) $y_1(t)$ m (dashed red), (2) $y_2(t)$ m (blue) and (3) $y_3(t)$ m (magenta) versus time t s, for $a_1 = 3 \times 10^{-3}$ m. The arrival time to the ground is $t_0 = 14.2857$ s, (1) $t_1 = 9183.68$ s, (2) $t_2 = 878.536$ s and (3) $t_3 = 9267$ s. Refer to the data in **Table 3**. The realistic case is given by (1) for Stokes' law.

5 固体球の落下実験と観察

INTEC の 3 階の教室に隣接する廊下から中庭に小球 (テニスボール，ゴルフボール，ピンポン玉，スーパーボール (同じ材質で半径が異なる 4 種類)) を静かに落下させる (**Fig.5a**) と，ピンポン玉は少し遅れ気味であるがほかのボールは概ね同じ速度で落下し (**Fig.5b**)，ほかのボールが着地した後でピンポン玉が着地した (**Fig.5c**)．これらのボールの空気中の自由落下の運動特性は，前節の式を用いて計算して，**Table 4**, **Table 5** に示される．**Table 4** の抵抗係数は，(h) と (i) を除けば，c_2 が主の値となる．**Table 5** は，(h) と (i) を除けば，(2) の量 (v_{02}, R_{e2}, t_{2t}) と (3) の量 (v_{03}, R_{e3}, t_{3t}) の値が近く，乱流域の条件を満たしている．

Table 4 Characteristic values on air drag force coefficient for various spherical balls.

(code) name	m	d	a	ρ	c_1	c_2
(a) tennis ball	6.03×10^{-2}	6.25×10^{-2}	3.125×10^{-2}	4.7171×10^{2}	1.0603×10^{-5}	9.2806×10^{-4}
(b) table tennis ball	2.3×10^{-3}	3.95×10^{-2}	1.975×10^{-2}	7.1275×10^{1}	6.701×10^{-6}	3.7069×10^{-4}
(c) golf ball	4.55×10^{-2}	4.27×10^{-2}	2.135×10^{-2}	1.1162×10^{3}	7.2439×10^{-6}	4.3318×10^{-4}
(d) super ball 01	1.25×10^{-2}	2.93×10^{-2}	1.465×10^{-2}	9.4909×10^{2}	4.9706×10^{-6}	2.0396×10^{-4}
(e) super ball 02	2.18×10^{-2}	3.48×10^{-2}	1.74×10^{-2}	9.8792×10^{2}	5.9037×10^{-6}	2.8772×10^{-4}
(f) super ball 03	2.1×10^{-2}	4.1×10^{-2}	2.05×10^{-2}	5.8193×10^{2}	6.9555×10^{-6}	3.9938×10^{-4}
(g) super ball 04	3.6×10^{-2}	4.25×10^{-2}	2.125×10^{-2}	8.9565×10^{2}	7.21×10^{-6}	4.2913×10^{-4}
(h) rain drop 01	4.1888×10^{-9}	$2. \times 10^{-4}$	$1. \times 10^{-4}$	1000	3.3929×10^{-8}	9.5033×10^{-9}
(i) rain drop 02	4.1888×10^{-6}	$2. \times 10^{-3}$	$1. \times 10^{-3}$	1000	3.3929×10^{-7}	9.5033×10^{-7}
(j) rain drop 03	1.131×10^{-4}	$6. \times 10^{-3}$	$3. \times 10^{-3}$	1000	1.0179×10^{-6}	8.553×10^{-6}

Table 5 3 つの空気抵抗 model の終端速度と Reynolds 数と特性時間の比較.

(code)	v_{1t}, v_{2t}, v_{3t}	R_{e1}, R_{e2}, R_{e3}	t_{1t}, t_{2t}, t_{3t}
(a)	5.5734×10^{4}, 25.234, 25.228	2.3416×10^{8}, 1.0602×10^{5}, 1.0599×10^{5}	3.4123×10^{4}, 7.7247, 7.7247
(b)	3.3637×10^{3}, 7.7978, 7.7888	8.9315×10^{6}, 2.0705×10^{4}, 2.0681×10^{4}	2.0594×10^{3}, 2.3871, 2.3871
(c)	6.1555×10^{4}, 32.084, 32.075	1.7669×10^{8}, 9.2092×10^{4}, 9.2068×10^{4}	3.7687×10^{4}, 9.8215, 9.8215
(d)	2.4645×10^{4}, 24.507, 24.495	4.8541×10^{7}, 4.827×10^{4}, 4.8246×10^{4}	1.5089×10^{4}, 7.5022, 7.5022
(e)	3.6188×10^{4}, 27.249, 27.239	8.4655×10^{7}, 6.3745×10^{4}, 6.3721×10^{4}	2.2156×10^{4}, 8.3416, 8.3416
(f)	2.9588×10^{4}, 22.7, 22.692	8.1548×10^{7}, 6.2564×10^{4}, 6.254×10^{4}	1.8115×10^{4}, 6.9491, 6.9491
(g)	4.8932×10^{4}, 28.673, 28.664	1.398×10^{8}, 8.1916×10^{4}, 8.1892×10^{4}	2.9959×10^{4}, 8.7773, 8.7773
(h)	1.2099, 2.0784, 0.95463	16.266, 27.942, 12.834	0.74074, 0.63623, 0.48264
(i)	1.2099×10^{2}, 6.5723, 6.3962	1.6266×10^{4}, 8.8361×10^{2}, 8.5994×10^{2}	7.4074×10^{1}, 2.0119, 2.0112
(j)	1.0889×10^{3}, 11.384, 11.324	4.3919×10^{5}, 4.5914×10^{3}, 4.5675×10^{3}	6.6667×10^{2}, 3.4848, 3.4847

$h_0 = 1000$ m からの落下時間は，空気の抵抗力がない場合に $t_0 = 1.4286 \times 10^1$ s であり，空気の抵抗力があると **Table 6** となる.

Table 6 3 つの空気抵抗 model の落下時間 ($h_0 = 1000$ m).

(code)	t_1	t_2	t_3
(a)	1.4292×10^{1}	4.1414×10^{1}	4.1423×10^{1}
(b)	1.4386×10^{1}	1.2879×10^{2}	1.2894×10^{2}
(c)	1.4291×10^{1}	3.3438×10^{1}	3.3446×10^{1}
(d)	1.4299×10^{1}	4.2538×10^{1}	4.2558×10^{1}
(e)	1.4295×10^{1}	3.8626×10^{1}	3.864×10^{1}
(f)	1.4297×10^{1}	4.5658×10^{1}	4.5675×10^{1}
(g)	1.4293×10^{1}	3.6904×10^{1}	3.6915×10^{1}
(h)	8.2665×10^{2}	4.813×10^{2}	1.0476×10^{3}
(i)	1.7657×10^{1}	1.5262×10^{2}	1.568×10^{2}
(j)	1.4599×10^{1}	8.8651×10^{1}	8.911×10^{1}

(a) のテニスボール場合に幾つかの高さから自由落下させて，地面に到達する時間を求めた (**Table 7**).

Table 7 テニスボールが自由落下し地面に到達する時間.

h_0	t_0	t_1	t_2	t_3
100	4.5175	4.5181	5.7175	5.719
10	1.4286	1.4286	1.4655	1.4655
5	1.0102	1.0102	1.0232	1.0235
3	0.78246	0.78248	0.7885	0.7885
1	0.45175	0.45176	0.45291	0.453
0.5	0.31944	0.31944	0.31985	0.32

これにより，3 m 以下の高さからの自由落下では空気の抵抗力の影響は非常に小さくなり，空気の抵抗力を無視しても差し支えないと言える.

(b) のピンポン玉の場合に幾つかの高さから自由落下させて，地面に到達する時間を求めた (**Table 8**). ピンポン玉の質量が小さいので，運動方程式中で抵抗力の効果が大きく，高さ 0.5 m からの自由落下でも遅れが生じる.

Table 8 ピンポン玉が自由落下し地面に到達する時間.

h_0	t_0	t_1	t_2	t_3
100	4.5175	4.5275	13.376	13.391
10	1.4286	1.4296	1.8259	1.8275
5	1.0102	1.0106	1.1497	1.1505
3	0.78246	0.78276	0.84677	0.8475
1	0.45175	0.45185	0.46398	0.4645
0.5	0.31944	0.31949	0.32375	0.324

Fig.5a INTEC の Block U の 3 階の教室の廊下から中庭にボールを自由落下させる瞬間. 3 名の学生が 2 種類ずつ計 6 個のボールを持っている.

Fig.5b 落下中の 6 個のボール.

Fig.5c ボールが地面に達し，跳ね上がった瞬間.

これらの静止画は，学生の携帯電話で撮影した video から変換したものである．落下中のボールの様子は video 映像の方が良く分かる．

教室内で，約 1.5 m の高さから自由落下させると，いずれのボールもほぼ同時刻に床面に達した．敢えて言えば，ピンポン玉は少し遅れる．つまり．ボールの質量を m_1，位置を $y_1 \equiv y_1(t)$ とし，抵抗を D とすると，ボールの運動方程式は (3.1) 式で表される．抵抗力 D は，物体の面積のみの関係するから，m_1 が大きいと相対的に空気抵抗の効果は小さくなるので，落下運動中に空気抵抗を無視できる．しかしながら，落下時間が長いと，小さな抵抗力が次第に効いて終端速度に近付き，等速運動になる．

6 おわりに

空気 (流体) 中の物体に働く抵抗の法則を雨滴の固体球 model を中心にまとめ，KTJ08 の物理学実験と合わせて空気の抵抗力の効果を考慮すべき条件を明示した．速度に比例する抵抗と速度の二乗に比例する抵抗力が共存する場合の運動方程式 (1 階の非線形微分方程式) が解析解を持つことを示し，その解は Reynolds 数による抵抗法則を棲み分けることを示した．

空気の抵抗は，物体が 1.5 m 以下高さから自由落下する場合には無視できる程に小さく，3 m 程度高さから自由落下する場合には軽い物体の場合には抵抗が作用し，重い物体の場合には抵抗は無視できる．さらに高いところからの自由落下では，質量が小さく半径が小さい物体では速度に比例する抵抗力が働き，質量が大きい物体には速度の二乗に比例する抵抗力が働く．さらに高いところから自由落下させる場合，物体には速度の二乗に比例する抵抗力が働き，終端速度で落下する．

雨滴の半径が 1 mm 以下の場合の自由落下では，固体球 model で近似できる．この半径より大きいと，球形から変形し，雨滴の変形・分裂が起こる．

雨滴は液体なので，球状液滴の安定性の問題として，流体力学的解析が期待される．粘性ポテンシャル理論 [8] の視点から，一定加速度で流体中を運動する液体球の界面不安定について，これまでの研究 [9]–[12] を踏まえて，取組むことができる．

本報告は，KTJ の物理学教材の開発であるが，高専の 3-5 年生の専門基礎の教程の改正に活用できる．特に，小中高の新教程の移行が終わり，高専の教程の組換・再編が進む中で，質の高い教材開発が求められている．

参考文献

[1] 物理基礎 (平成 23 年 3 月 30 日検定済), 物理 (平成 24 年 3 月 15 日検定済)，数研出版，平成 25 年 1 月 10 日発行.

[2] 舟田 敏雄: “KTJ07 Semester 3, 4 の物理実験テーマ” (内部資料) KTJ, INTEC, 2015.

[3] 小西 克享: “終端速度の求め方” 埼玉工業大学機械工学学習支援セミナー http://www.sit.ac.jp/user/konishi/JPN/L_Support/SupportPDF/TerminalVelocity.pdf

[4] 舟田 敏雄: “雨滴の落下速度” (physics-KTJ07-06-nov28rev.pdf, 2014.12.3)

[5] 資料「第 4 章 雨滴の落下速度 (2001.5.26)」 http://www5b.biglobe.ne.jp/ saturn/meteology/04.htm

[6] 荒木 健太郎:『雲の中では何が起こっているのか』第 2 版，ベレ出版，2014 年 ISBN 978-4-86064-397-3

[7] Wikipedia: “雨” https://ja.wikipedia.org/wiki/雨

[8] D. D. Joseph, T. Funada & J. Wang: *Potential Flows of Viscous and Viscoelastic Fluids*. Cambridge University Press, 2007.

[9] E. Y. Harper, G. W. Grube, & I-D. Chang: “On the breakup of accelerating liquid drops” *J. Fluid Mech.* **52** (1972), pp.565-591.

[10] J. C. Padrino, T. Funada & D. D. Joseph: “Purely irrotational theories for the viscous effects on the oscillations of drops and bubbles” *International Journal of Multiphase Flow* **34** (2008), pp.61-75.

[11] I. Rozhkov, A. F. Vakakis & R. H. Rand: “Non-linear modal interactions in the oscillations of a liquid drop in a gravitational field” *International Journal of Non-Linear Mechanics* **36** (2001), pp.803-812.

[12] 舟田 敏雄, Joseph Daniel: “一定加速度で運動する液滴の界面不安定と振動現象の解析” 第 59 回理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM 2010, pp.125-126 (平成 22 年 6 月 8 日発行). OS1-1 気液界面の物理と動力学, 講演番号 1D11.